

Bestimmung von Materialparametern der elastisch-plastischen Verformung und des spröden Versagens aus Small-Punch-Kleinstproben

Von der Fakultät für Maschinenbau, Verfahrens- und Energietechnik
der Technischen Universität Bergakademie Freiberg

genehmigte

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor-Ingenieur
(Dr.-Ing.)

vorgelegt von **Dipl.-Ing. Stefan Rasche**

geboren am 16. September 1978 in Zwickau

Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. habil. Meinhard Kuna, Freiberg
Prof. Dr.-Ing. habil. Berthold Scholtes, Kassel

Tag der Verleihung: 29. April 2013

Kurzzusammenfassung

Der Small-Punch-Test (SPT) ist eine vielversprechende minimalinvasive mechanische Prüfmethode, wenn nur sehr wenig Material für Proben zur Verfügung steht. Die vorliegende Arbeit hat das Ziel, aus Small-Punch-Kleinstproben wahre Materialparameter der elastisch-plastischen Verformung und des spröden Versagens zu bestimmen. Die Kraft-Verschiebungs-Kurve stellt die nichtlineare Materialantwort der inhomogen beanspruchten Probe dar. Das inverse Problem der Identifikation konstitutiver Materialparameter wird numerisch mit Hilfe von Finite-Elemente-Simulationen in Verbindung mit einem Response-Surface-Modell und nichtlinearer Optimierungsverfahren gelöst, indem die Abweichung zwischen gemessener und simulierter Kurve minimiert wird. Mit Hilfe einer eigens entwickelten Kühlapparatur wurden Versuche mit ferritischen Stählen von Raumtemperatur bis hinunter zu -191°C durchgeführt und die temperaturabhängigen Fließkurven identifiziert. Bei tiefen Temperaturen wurden die Weibull-Parameter der zufällig streuenden Sprödbbruchfestigkeit bestimmt und die Bruchzähigkeitsverteilung durch Simulation einer CT-Probe vorhergesagt. Für eine Aluminiumoxidkeramik wurden ebenfalls die Weibull-Parameter bestimmt sowie mit Indenterissen versehene Proben zur Abschätzung der Bruchzähigkeit verwendet.

Abstract

The small punch test (SPT) is a promising minimally invasive material testing method, especially in cases where only small amounts of material are available. This thesis is aimed at identifying true material parameters of elastic-plastic deformation and brittle fracture. The load-displacement curve represents the non-linear material response of the nonuniformly stressed specimen. The identification of material parameters of constitutive laws is an inverse problem, which is solved numerically. Finite element simulations together with a response surface model and nonlinear optimization techniques are applied to minimize the error between measured and simulated curves. A specially developed cooling apparatus was used to perform tests with ferritic steels from room temperature down to -191°C . The temperature dependent yield stresses and hardening curves were identified. At low temperatures the Weibull parameters of randomly distributed cleavage fracture strength were estimated. The fracture toughness distribution was then predicted by the help of a finite element simulation of a CT specimen. Furthermore the Weibull parameters of an alumina ceramic were determined and its fracture toughness was predicted using specimens prepared with indentation cracks.

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik und Fluidodynamik der TU Bergakademie Freiberg. Der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) sei gedankt für die finanzielle Förderung im Forschungsprojekt Ku 929/11 („Bestimmung von Materialkennwerten des spröde-duktilen Bruchverhaltens aus Small-Punch-Kleinstproben“).

Persönlich möchte ich mich besonders bei Herrn Prof. M. Kuna für die Betreuung der Arbeit und die Übernahme des Hauptreferats bedanken. Er ermöglichte mir es, über mehrere Jahre ein interessantes Thema bearbeiten zu können, welches Aspekte der Werkstoffmechanik, Werkstoffprüfung, numerischen Simulation und Materialparameteridentifikation zu einem erfolgreichen Zusammenspiel verbindet.

Bei Herrn Prof. B. Scholtes bedanke ich mich für das Interesse an meiner Arbeit und die Übernahme des Koreferates.

Meinen besonders herzlichen Dank möchte ich Frau Dagmar Schmidt für die sorgfältige Präparation der Small-Punch-Proben und die Durchführung der Small-Punch-Experimente aussprechen. Danken möchte ich auch Herrn Kurt Fredersdorf für die Unterstützung beim Aufbau der Versuchseinrichtung.

Ohne die Bereitstellung von Material für die Probenentnahme wären die Ergebnisse für den Stahl 22NiMoCr37 und die Laserschweißnaht nicht möglich gewesen, wofür ich Herrn Dr. J. Heerens danken möchte. Danken möchte ich auch Dr. Raul Bermejo und Dr. Tanja Lube vom Institut für Struktur- und Funktionskeramik der Montanuniversität Leoben für die Zusammenarbeit bei den Experimenten mit Keramik und wertvolle Hinweise sowie dem Institutsvorstand Prof. R. Danzer, der die Zusammenarbeit unterstützte.

Schließlich danke ich meinen Angehörigen, insbesondere meiner Freundin Sabine, für die entgegengebrachte Geduld und Unterstützung während des Anfertigens dieser Arbeit.

Ohne namentliche Nennung möchte ich weiteren Personen danken, insbesondere meinen ehemaligen Kollegen am Institut für Mechanik und Fluidodynamik und all jenen Menschen, die mich durch Gespräche und Diskussionen fachlicher und nicht fachlicher Art inspirierten. Auch die scheinbar unbedeutenden Dinge während und abseits des wissenschaftlichen Arbeitsalltags tragen zur Motivation und zum Gelingen der Forschung bei.

Stefan Rasche

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur	xi
1 Einleitung	1
1.1 Motivation und Zielsetzung	1
1.2 Aufbau der Arbeit	4
2 Literaturüberblick zum Small-Punch-Test	5
2.1 Einführung	5
2.2 Versuchsaufbau und Probenformen	6
2.3 Versuchsdurchführung, -ergebnis und -kennwerte	7
2.4 Materialcharakterisierung mit dem SPT	8
2.4.1 Untersuchte Werkstoffe	8
2.4.2 Empirische Korrelationen mit Kennwerten aus dem SPT	9
2.4.3 Anwendung numerischer Simulationen	10
2.4.4 Experimentelle Weiterentwicklungen	14
3 Forschungsziele und Methoden	15
4 Theoretische Betrachtungen	19
4.1 Kontinuumsmechanische Grundlagen	19
4.1.1 Konfiguration und Bewegung	19
4.1.2 Materielle und räumliche Zeitableitung	21
4.1.3 Deformations- und Verzerrungsmaße	21
4.1.4 Spannungen	26
4.2 Konstitutive Materialgleichungen	27
4.2.1 Linearelastisches Material	27
4.2.2 Elastisch-Plastisches Material mit isotroper Verfestigung	28
4.3 Identifikation konstitutiver Materialparameter	35
4.3.1 Experiment, Simulation, Fehleroptimierung	35
4.3.2 Inverses Problem	36
4.3.3 Nichtlineares Ausgleichsproblem	38
4.3.4 Optimierungsverfahren	39
4.4 Response-Surface-Modellierung	41
4.4.1 Einführung	41
4.4.2 Modellantwort und Versuchsplan	42
4.4.3 Response-Surface-Modelle	43
4.5 Bruchmechanische Grundlagen	45
4.5.1 Rissmodelle und -beanspruchung	45
4.5.2 Konzept der Spannungsintensitätsfaktoren	47

4.5.3	LEBM, Kleinbereichsfließen und EPBM	48
4.5.4	Das J -Integral	50
4.5.5	FEM-Techniken zur Analyse von Rissen	51
4.6	Probabilistische Sprödbbruchmodelle	54
4.6.1	Weakest-Link-Theorie und Weibull-Verteilung der Festigkeit	54
4.6.2	Sprödbbruchmodell für Keramik	57
4.6.3	Sprödbbruchmodell für ferritische Stähle	60
4.6.4	Parameterschätzung mit der Maximum-Likelihood-Methode	64
4.6.5	Weibull-Darstellung	66
5	Experiment	67
5.1	Versuchsauslegung und Konfigurationen	67
5.2	SPT-Apparatur für Tieftemperaturversuche	69
5.3	Untersuchte Werkstoffe	71
5.3.1	Ferritischer Stahl 22NiMoCr37	71
5.3.2	Ferritischer Stahl 18Ch2MFA	73
5.3.3	Lasergeschweißter Stahl 355 EMZ	74
5.3.4	Aluminiumoxidkeramik Rubalit 708S	76
5.4	Probenentnahme und -präparation	76
5.5	Kraft- und Wegmessung	78
5.6	Experimentelle Ergebnisse	78
5.6.1	Stahlwerkstoffe	79
5.6.2	Aluminiumoxidkeramik	84
5.6.3	Bilder der Bruchflächen	86
6	FEM-Simulation des SPT	89
6.1	Gesamtmodell des Versuchs	89
6.1.1	Modellierung der Kontaktsteifigkeit	91
6.1.2	Approximation der Apparturnachgiebigkeit	91
6.2	Vereinfachtes Modell	93
6.3	Parameterstudie	95
6.3.1	Parametervariation bei elastischem Material	95
6.3.2	Parametervariation bei elastisch-plastischem Material	99
7	Identifikation der Fließkurve	103
7.1	Erläuterung der Vorgehensweise	103
7.2	Parametrische Beschreibung der Fließkurve	107
7.2.1	Fließkurvenansätze	107
7.2.2	Eindeutigkeit der Fließkurvenparameter	108
7.2.3	Bereichsweise lineare Fließkurve	109
7.2.4	Berechnung der Datenbasis	112
7.3	Lokale Approximation der parameterabhängigen Kraft-Verschiebungs-Kurve	113
7.3.1	Mehrdimensionale Interpolation für zwei Parameter	113
7.3.2	Erweiterung auf sechs Parameter	116
7.3.3	Multiple-Responses-Modell für Kraft-Verschiebungs-Kurve	117

7.4	Optimierung der Zielfunktion	118
7.4.1	Residuum und Ableitungen	119
7.4.2	Globale Startwertsuche	121
7.4.3	Gedämpftes Newton-Verfahren	121
7.4.4	Methode des steilsten Abstiegs	124
7.4.5	Globale Suche und Optimierung auf dem Rand	124
7.5	Programm zur Parameteridentifikation	125
7.5.1	Entwicklung des modularen Programms SOFI	125
7.5.2	Beschreibung der Programmmodule	125
7.5.3	Test und Validierung des Programms	129
7.6	Ergebnisse der Parameteridentifikation	131
7.6.1	22NiMoCr37	132
7.6.2	18Ch2MFA	133
7.6.3	Laserschweißnaht	134
7.6.4	Diskussion	134
7.7	Verifikation der identifizierten Materialparameter	135
7.7.1	Vergleich gemessener mit simulierten Kraft-Verschiebungs-Kurven	135
7.7.2	Vergleich identifizierter Fließkurven mit Referenzwerten	138
8	Identifikation probabilistischer Sprödbbruchparameter	141
8.1	Vorbereitung und Durchführung der Weibull-Parameterschätzung	141
8.2	Numerische Berechnung der Weibull-Spannung und des effektiven Volumens	144
8.3	Weibull-Parameter für Aluminiumoxid-Keramik	145
8.4	Weibull-Parameter des BEREMIN-Modells für Stahl	148
8.4.1	Ergebnisse 22NiMoCr37	149
8.4.2	Ergebnisse 18Ch2MFA	151
8.4.3	Diskussion und numerische Studie	152
8.5	Weibull-Parameter des Modells mit Schwellwert von GAO	155
8.6	Vorhersage der Sprödbbruchzähigkeit von Stahl	156
8.6.1	Diskussion zur Übertragbarkeit der Weibull-Parameter	156
8.6.2	FE-Simulation der CT-Probe	158
8.6.3	Vorhersage von K_{Jc} für 22NiMoCr37	158
9	Bruchzähigkeitsbestimmung an Keramikproben mit Indenterriss	163
9.1	Bruchzähigkeitsbestimmung mit Härteeindrücken	163
9.2	Vorgehensweise	164
9.3	Erzeugung und Vermessung der Vickers-Risse	165
9.4	Belastung im SPT	167
9.5	FEM-Berechnung des Spannungsintensitätsfaktors an der Rissfront	168
9.6	Abschätzung von K_{Ic}	172
10	Zusammenfassung	173
	Literaturverzeichnis	177

A	Anhang	195
A.1	Theoretische Grundlagen	195
A.1.1	Wahrscheinlichkeitsverteilung	195
A.1.2	Volumenabhängigkeit der Sprödbbruchwahrscheinlichkeit	195
A.1.3	Moore-Penrose-Inverse	197
A.2	Zur Auswertung von Messungen	197
A.2.1	Numerische Berechnung der Small-Punch-Bruchenergie	197
A.2.2	Zugversuche für 18Ch2MFA an gekerbten Rundzugproben	198
A.3	FEM-Simulation des SPT	199
A.3.1	FEM-Simulation des SPT mit/ohne Niederhalter	199
A.3.2	Einfluss des Stempelradius auf die Spannung in einer Keramikprobe	201
A.3.3	Parametrisierte ABAQUS-Inputdatei	203
A.3.4	Skriptdatei für Parameterstudie und Datenbasisberechnung	208
A.4	Test des Programms SOFI	208
A.4.1	Reidentifikation von Polynomkoeffizienten	208
A.4.2	Reidentifikation von Parametern des Validierungspatterns	209
A.5	Einzelergebnisse Parameteridentifikation am Beispiel der Laserschweißnaht	211
B	Fertigungszeichnungen von Stempel und Matrice	213

Nomenklatur

Lateinische Buchstaben

\mathcal{A}	linearer Vorwärtsoperator
a	Risslänge
a_0, \dots, a_4	Polynomkoeffizienten
a_1, a_2, a_3	Ansatzfreiwerte für Approximation der Apparurnachgiebigkeit
a_{eff}	effektive Risslänge
\mathcal{B}	materieller Körper
B	Probendicke einer Bruchmechanikprobe
B_0	Referenzdicke einer Bruchmechanikprobe
$bias$	Biasfaktor
b	charakteristische Probenfestigkeit
C_{ijkl}	Elastizitätstensor
c	Halbe Länge eines halbelliptischen Oberflächenrisses
c	Überschneidung der Kontaktflächen
c_0	Abstand zweier Kontaktflächen mit gerade verschwindendem Kontaktdruck
D	Durchmesser der SP-Probe
\mathbf{d}, d_{ij}	Deformationsgeschwindigkeitstensor
d	Bohrungsdurchmesser im SPT
$d\mathbf{A}, d\mathbf{A}_0$	vektorielles Flächenelement in Momentan- und Ausgangskonfiguration
dV, dV_0	Volumenelement in Momentan- und Ausgangskonfiguration
$d\mathbf{X}$	materielles Linienelement in der Ausgangskonfiguration
$d\mathbf{x}$	materielles Linienelement in der Momentankonfiguration
\mathbf{E}, E_{IJ}	GREEN-LAGRANGEScher Verzerrungstensor
E	Elastizitätsmodul
E^{SP}	Small-Punch-Bruchenergie
\mathbf{e}, e_{ij}	EULER-ALMANSIScher Verzerrungstensor
$\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_I$	kartesischer Basisvektor in Momentan- und Ausgangskonfiguration
\mathcal{F}	nichtlinearer Vorwärtsoperator
\tilde{F}	Response-Surface-Approximation der simulierten Stempelkraft
\mathbf{F}, F_{iJ}	Deformationsgradiententensor

\mathbf{F}^{el}	elastischer Anteil von \mathbf{F}
\mathbf{F}^{pl}	plastischer Anteil von \mathbf{F}
F	Kraft
F	Verteilungsfunktion
$F^{(l)}$	simulierte Stempelkraft am l -ten Parameterpunkt
F_{exp}	gemessene Stempelkraft
F_{e}	Kraftgrenze für Beginn der plastischen Verformung im SPT
F_{max}	Bruchkraft
F_{mess}	gemessene Stempelkraft
F_{m}	Kraftmaximum im SPT
F_{sim}	simulierte Stempelkraft
F_k	Stempelkraft an k -ter Stützstelle
f	Fließfunktion
f_{ij}	dimensionslosen Spannungsfunktionen der K -Feld-Lösung
\mathcal{G}	Energiefreisetzungsrate
G	Schubmodul
g	Erdbeschleunigung
g_{ij}	dimensionslosen Verschiebungsfunktionen der K -Feld-Lösung
\mathbf{H} , H_{ij}	Hesse-Matrix
\mathbf{H}^+	Moore-Penrose-Pseudoinverse der Hesse-Matrix
\mathbf{H} , \mathbf{h}	HENCKYScher Verzerrungstensor in Ausgangs- und Momentankonfiguration
h	Dicke der SP-Probe
h_0	Dicke der SP-Probe im unverformten Zustand
h_{α}	innere Verfestigungsvariable
h_{f}	minimale Dicke der verformten SP-Probe bei Versagen
\mathbf{I}	Einheitstensor
\mathbf{J} , J_{ki}	Jacobi-Matrix
J	J -Integral
J_{Ic}	Bruchzähigkeit
K	Festigkeitskoeffizient der Potenzgesetzverfestigung nach LUDWIK
K_0	Weibull-Parameter der Bruchzähigkeitsverteilung
$K_{\text{I,appl}}$	Spannungsintensitätsfaktor infolge aufgebrachtter Belastung
$K_{\text{I,res}}$	Spannungsintensitätsfaktor infolge Eigenspannungen
K_{Ic}	Bruchzähigkeit
K_{I} , K_{II} , K_{III}	Spannungsintensitätsfaktoren
K_{Jc}	Bruchzähigkeit (elastisch-plastisch)
K_{min}	Mindestbruchzähigkeit

k	Konditionszahl der Hesse-Matrix
L	Elementkantenlänge
L	Likelihood-Funktion
L	globale Bauteilbelastung
\mathbf{l}, l_{ij}	Geschwindigkeitsgradiententensor
l	Länge
l_0	Mikrorisslänge
M	Anzahl Designpunkte in der Datenbasis
\hat{m}_{cor}	biaskorrigierter Weibull-Modul-Schätzwert
m	Weibull-Modul
m_K	Weibull-Modul der Bruchzähigkeitsverteilung
\mathbf{N}, \mathbf{n}	Normalenvektor in Ausgangs- und Momentankonfiguration
N	Anzahl Stützstellen
N	Anzahl diskretisierter Punkte der F - u -Kurve
N	Stichprobenumfang
N_1	Zahl der spröde gebrochenen Proben
N_2	Zahl der nicht spröde gebrochenen Proben
n	Anzahl Kettenglieder
n	Verfestigungsexponent der Potenzgesetzverfestigung nach LUDWIK
n_{pl}	Anzahl plastifizierter Volumenelemente
n_{p}	Anzahl Parameter, Dimension des Parameterraums
\mathbf{P}, P_{iJ}	1. PIOLA-KIRCHHOFF Spannungstensor
P	Indenterkraft
P	Raum der Systemparameter
P	Wahrscheinlichkeit
P_{f}	Ausfallwahrscheinlichkeit
P_{s}	Überlebenswahrscheinlichkeit
P_i	Versagenswahrscheinlichkeit eines Kettengliedes
$\overset{s}{\mathbf{p}}_{(0)}$	Startnäherung s für Minimierung der Zielfunktion
$\overset{s}{\mathbf{p}}^*$	Optimierungsergebnis für Startnäherung s
\mathbf{p}	Nennspannungsvektor
\mathbf{p}, p_i	Vektor der Modellparameter
\mathbf{p}^*	optimaler Parametervektor
$\mathbf{p}^{(l)}$	l -ter Parameterpunkt der Datenbasis bzw. der Interpolationszelle
\mathbf{p}_{base}	Gesamtheit der Parameterpunkte der Datenbasis
$\mathbf{p}_{\text{ident}}$	identifizierter Parametervektor
P	materieller Punkt

p	Kontaktdruck
p_0	Kontaktdruck beim Abstand Null
p_i^{\min}, p_i^{\max}	kleinster und größter Parameterwert des Parametergitters
p_i^S	globale Schwerpunktkoordinaten der Interpolationszelle
\mathbb{R}^n	n -dimensionaler Euklidischer (Vektor)raum
\mathbf{R}, R_{iJ}	Drehtensor
R	Stempelradius im SPT
R	Verfestigungsfunktion
R_e	Dehngrenze im Zugversuch
R_m	Zugfestigkeit
\mathbf{r}, r_k	Vektor der Residuen
r	Exponent der Pareto-Verteilung
r	Tiefziehradius im SPT
r	radiale Koordinate
r_{pl}	Radius der plastischen Zone an der Rissspitze
S	Überlebenswahrscheinlichkeit
\mathbf{s}	Schnittkraftvektor
\mathbf{s}	Schrittvektor der Parameteroptimierung
s	Weg
s_i	elastische Federwege der SPT-Apparatur
T_p	plastischer Tangentenmodul
T_{SP}	spröd-duktiler Übergangstemperatur im SPT
\mathbf{t}, t_i	Schnittspannungsvektor
t	Tiefenposition in der Platte
t, t_0	Zeit, Startzeit
\mathbf{U}, U_{IJ}	rechter Strecktensor
\mathbf{u}, u_i	Verschiebungsvektor
u	Verschiebung
u_f	Verschiebung bei Versagen im SPT
u_{\max}	maximaler Verschiebungswert
u_{mess}	gemessene Gesamtverformung im SPT
u_{\min}	minimaler Verschiebungswert
u_{SPT}	Probenverformung im SPT
u_k	Verschiebung an k -ter Stützstelle
\mathbf{V}, V_{ij}	linker Strecktensor
V	Volumen
V_0	Referenzvolumen

V_{eff}	effektives Volumen
V_{pl}	plastifiziertes Volumen
V_i	Volumenelement
\mathbf{v}, v_i	Geschwindigkeitsvektor
W^{el}	elastische Verzerrungsenergie
\mathbf{w}, w_{ij}	Drehgeschwindigkeitstensor
\mathbf{w}, w_i	lokale normierte Parameterkoordinaten in der Interpolationszelle
w	Formänderungsenergiedichte
\mathbf{X}, X_I	Ortsvektor der materiellen Koordinaten in der Ausgangskonfiguration
X	Raum der Eingangsgrößen
X	Zufallsgröße
\mathbf{x}, x_i	Ortsvektor der räumlichen Koordinaten in der Momentankonfiguration
\mathbf{x}	Vektor der Eingangsgrößen
x	Wert einer Zufallsgröße
x_1, x_2, x_3	kartesische Koordinaten
x_i	Einflussgrößen
Y	Raum der Ausgangsgrößen
Y_{I}	Geometriefaktor
\mathbf{y}	Vektor der Ausgangsgrößen
y	Modellantwort

Griechische Buchstaben

α	Dämpfungsfaktor
β	Exponent der Pareto-Verteilung
β_{ij}	Modellkoeffizienten eines Response-Surface-Modells
Γ	Integrationsweg um die Rissspitze
γ_0	spezifische Oberflächenenergie
γ_{f}	effektive spezifischen Bruchflächenenergie
γ_{p}	plastischer Anteil der spezifischen Bruchflächenenergie
$\Delta\sigma_i$	Betrag der Verfestigung
Δp_i	Gitterschrittweite im Parameterraum
Δu	Apparaturnachgiebigkeit
δ_{ij}	KRONECKER-Symbol
ϵ	Fehlerschranke
$\boldsymbol{\varepsilon}, \varepsilon_{ij}$	infinitesimaler (linearisierter) Verzerrungstensor
ε	Modellfehler
ε^{H}	HENCKY-Dehnung
ε^{t}	technische Dehnung

ε_c	charakteristische Dehnung des Exponentialansatzes nach VOCE
ε_f	Bruchdehnung im SPT
ε_V	Volumendehnung
$\varepsilon_V^{\text{el}}$	elastische Volumendehnung
$\varepsilon_{ij}^{\text{el}}$	elastischer Anteil des Verzerrungstensors
$\varepsilon_{ij}^{\text{pl}}$	plastischer Anteil des Verzerrungstensors
$\varepsilon_V^{\text{pl}}$	plastische Vergleichsdehnung
g_α	eindimensionale Interpolationsfunktionen (Formfunktionen)
θ	Polarwinkelkoordinate
κ	elastische Konstante
$\dot{\lambda}$	plastischer Multiplikator
λ	LAMÉsche Konstante
$\lambda_{\max}, \lambda_{\min}$	größter und kleinster Eigenwert der Hesse-Matrix
μ	Reibungskoeffizient
μ	LAMÉsche Konstante, Schubmodul
ν	Querkontraktionszahl
ξ_3	lokale Koordinate eines Rissspitzenelementes in Richtung der Rissfront
Π	Energiepotential
σ	Zugspannung
σ_0	charakteristische Festigkeit der Weibull-Verteilung
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	1., 2. und 3. Hauptspannung
σ_{cV}	auf V_0 umgerechnete Probenfestigkeit
σ_c	Probenfestigkeit
σ_c	kritische Normalspannung
σ_{eq}	äquivalente Zugspannung
σ_{F0}	Anfangsfließspannung
σ_F	Fließspannung
σ_{\max}	maximale Zugspannung
σ_{\min}	untere Festigkeitsgrenze
σ_s	Sättigungsspannung des Exponentialansatzes nach VOCE
σ_u	Weibull-Referenzspannung
σ_V	Vergleichsspannung
$\sigma_{W\min}$	Untergrenze der Weibull-Spannung
σ_{ij}^D	Spannungsdeviator (deviatorischer Spannungsanteil)
σ_{ij}^K	Kugeltensor (hydrostatischer Spannungsanteil)
$\sigma_{1\max}$	größte 1. Hauptspannung im Bauteil
σ_{Mises}	Mises-Vergleichsspannung

σ, σ_{ij}	CAUCHYscher Spannungstensor
σ_W	Weibull-Spannung
τ	Zeit
Φ	Zielfunktion
ϕ	Ellipsenwinkel
Ω	Oberfläche (=Raumwinkel) der Einheitskugel
ω	Vektor der Orientierungswinkel eines Risses

Operatoren und sonstige Symbole

$(.)^T$	Transponierte
$(.)^*$	optimaler Vektor
$(.)^{-1}$	Inverse
$(.)_{(0)}$	Startwert, Startvektor
$(.)_{(i)}$	i -te Iteration
$D(.) / Dt$	materielle Zeitableitung
$\hat{(.)}$	Parameterschätzwert
$\langle . \rangle$	FÖPPL-Klammer
$\det(.)$	Determinante
$\nabla(.)$	NABLA-Operator (Gradientenoperator)
\otimes	Tensormultiplikation
$\partial(.) / \partial(.)$	partielle Ableitung
$\ .\ $	Euklidische Norm, 2-Norm

Abkürzungen

F - u -Kurve	Kraft-Verschiebungs-Kurve
ASTM	American Society for Testing and Materials
CARES	FEM-Postprozessor der NASA für die statistische Zuverlässigkeitsbewertung keramischer Bauteile
CCA	Compact Crack Arrest
CEN	Comité Européen de Normalisation (Europäisches Institut für Normung)
CT-Probe	Kompaktzugprobe
EPBM	elastisch-plastische Bruchmechanik
ESZ	ebener Spannungszustand
EVZ	ebener Verzerrungszustand
FATT	Fracture Appearance transition temperature
FE	Finite Elemente
FEM	Finite-Elemente-Methode
FPS	First Principal Stress criterion

GW	Grundwerkstoff
IMFD	Institut für Mechanik und Fluidodynamik
ISB	Indentation strength in bending
ISFK	Institut für Struktur- und Funktionskeramik
LEBM	linear-elastische Bruchmechanik
MDBT	Miniaturized Disk Bend Test
MIT	Massachusetts Institute of Technology
ML	Maximum Likelihood
MRR	Median-Rank-Regression
PIA	Principle of independent action
REM	Rasterelektronenmikroskop
RSM	Response-Surface-Methode
RT	Raumtemperatur
RWP	Randwertproblem
SCF	Surface crack in flexure
SEVNB	Single-edge V-notched Beam
SOFI	<u>S</u> uch- und <u>O</u> ptimierungsalgorithmus für die <u>F</u> ließkurven <u>i</u> dentifikation
SP-Probe	Small-Punch-Probe
SPT	Small-Punch-Test
STAU	FEM-Postprozessor der Universität Karlsruhe für die statistische Zuverlässigkeitsbewertung keramischer Bauteile
SZ	Schmelzzone
TEM	Transmissionselektronenmikroskop
WEZ	Wärmeeinflusszone

Hinweise

Bei Indexschreibweise von Tensoren gilt die EINSTEINSche Summationskonvention, nach der über doppelt auftretende Indizes von eins bis drei summiert und das Summationszeichen weggelassen wird.

Partielle Ableitungen nach den Koordinaten x_i und nach der Zeit t werden auch verkürzt geschrieben:

$$\partial(.)/\partial x_i = (.),_i \quad \text{und} \quad \partial(.)/\partial t = (\dot{.}).$$

In einigen Diagrammen dieser Arbeit erscheint als Dezimaltrennzeichen der Punkt anstelle des Kommas. Dies ist der verwendeten Software geschuldet, sollte jedoch dem Leser englischsprachiger Literatur vertraut sein.

1 Einleitung

1.1 Motivation und Zielsetzung

Die mechanischen Werkstoffeigenschaften von Bauteilen in technischen Anlagen verändern sich infolge Alterung und betrieblicher Belastungen. Besonders gefährlich ist die Materialversprödung. Sie ist von außen nicht sichtbar, vermindert jedoch die mechanische Beanspruchbarkeit und führt schlimmstenfalls, wenn im Bauteil vorhandene Risse eine kritische Größe erreichen, zum vorzeitigen Totalausfall. Sicherheitsrelevante Bauteile müssen daher rechtzeitig ausgetauscht werden, bevor ihr Versagen die Zerstörung einer gesamten technischen Anlage zur Folge hat. Um dennoch eine optimale Ausnutzung der Restlebensdauer zu ermöglichen, ist eine in-situ Überwachung des aktuellen Werkstoffzustandes und eine Neubewertung der Festigkeit und Lebensdauer erforderlich. Dies macht allerdings nur dann Sinn, wenn Kleinstprobentests und minimalinvasive Probenentnahmetechniken angewendet werden können.

Der Anfang der 1980er Jahre entwickelte Small-Punch-Test (SPT) [Man81, Hua82, Bai83] eignet sich aufgrund seines sehr geringen Materialbedarfs besonders gut für die lokale minimalinvasive Probenentnahme. Die flache Probengeometrie ermöglicht die Entnahme an der Oberfläche von großen dickwandigen Bauteilen ohne das Bauteil dabei zu zerstören [Mer89, Fou96]. Kleine Proben sind auch dann von Interesse, wenn nur sehr begrenzt Material verfügbar ist, zu wenig um daraus die vergleichsweise großen standardisierten Proben für Zug- und Bruchmechanikversuche zu fertigen oder wenn aus dem Restmaterial von Standardproben weitere Materialeigenschaften bestimmt werden sollen. Inzwischen findet der SPT weltweite Beachtung (USA, Japan, Kanada, Südkorea, Großbritannien, China, Irland, Deutschland, Australien, Mexiko, Frankreich, Indien, Tschechien, Schweiz, Italien, Spanien), wie die zahlreichen Veröffentlichungen (über 200) zeigen. Bis in die Gegenwart beschränkt sich allerdings die Mehrzahl der Veröffentlichungen auf werkstoffspezifische empirische Korrelationen zwischen technischen Kennwerten aus dem SPT und Kennwerten aus standardisierten Zug- und Bruchmechanikversuchen an vergleichsweise großen Proben. Möglicherweise liegt es an dem hohen zu betreibenden Aufwand, dass bisher nur wenige Forschergruppen versuchen, das Potential des SPT für die direkte Bestimmung von echten geometrieunabhängigen Materialparametern auszureizen und

deshalb diese Korrelationsmethodik noch immer Stand der Technik ist.

Die Forschung am Institut für Mechanik und Fluidodynamik (IMFD) der TU Bergakademie Freiberg verfolgt das Ziel, das in der Kraft-Verformungs-Kurve des SPT enthaltene Informationspotential mit Hilfe numerischer Simulationen direkt für die Parameteridentifikation von kontinuumsmechanischen Materialmodellen zu erschließen, welche dann für die Simulation des Verformungs- und Versagensverhaltens von Bauteilen verwendet werden können. Wenn die Übertragbarkeit der aus dem SPT identifizierten Materialgesetze auf andere Geometrien und Belastungszustände gewährleistet ist, können Kennwerte aus Zugversuchen oder Bruchmechanikversuchen vorhergesagt werden (siehe Abbildung 1.1) und somit kostenaufwendige und vor allem Material verschlingende Versuche an vergleichsweise großen Proben vermieden werden. In der Arbeit von ABENDROTH [Abe04] wurde am Beispiel von duktilen Stählen bereits gezeigt, dass dies möglich ist. Er bestimmte Fließkurvenparameter und Parameter der duktilen Schädigung bei Raumtemperatur mit Hilfe von Finite-Elemente-Simulationen und künstlichen neuronalen Netzen. Anschließend simulierte er mit den aus dem SPT identifizierten Parametern das duktile Risswachstum in einer Bruchmechanikprobe.

Die vorliegende Arbeit hat das Ziel, den SPT für die Identifikation von Materialparametern des Verformungs- und Versagensverhaltens spröde-duktiler bis spröder Werkstoffe zu qualifizieren. Im günstigsten Fall könnte mit Hilfe des SPT das spröde Versagen von Bauteilen vorhergesagt werden, ohne eine einzige Zug- oder Bruchmechanikprobe zu zerstören. Um den Umfang der Arbeit zu begrenzen, wird sich auf drei wesentliche Aufgaben beschränkt:

- Erstens soll das elastisch-plastische Verformungsverhalten von Stählen und ihr sprödes Versagen bei tiefen Temperaturen mit dem SPT charakterisiert werden.
- Zweitens soll die mechanische Charakterisierung von lokal veränderlichem Materialgefüge mit dem SPT am Beispiel einer Schweißnaht erprobt werden.
- Drittens soll die Eignung des SPT für die Charakterisierung der Festigkeit und Bruchzähigkeit von technischer Keramik untersucht werden.

Der Schwerpunkt der Materialcharakterisierung liegt dabei auf der Identifikation von Fließkurvenparametern und probabilistischen Spröbruchparametern.

Metallische Werkstoffe verhalten sich bei Raumtemperatur meist duktil, erst bei tiefen Temperaturen zeigen sie sprödes Bruchverhalten und eine stark verminderte Bruchzähigkeit. Um den Spröbruch überhaupt untersuchen zu können, ist es erforderlich für den SPT eine geeignete Kühleinrichtung zu entwickeln. Keramische Werkstoffe sind bei Raumtemperatur ideal spröde und weisen aufgrund fehlender plastischer Verformung nur sehr

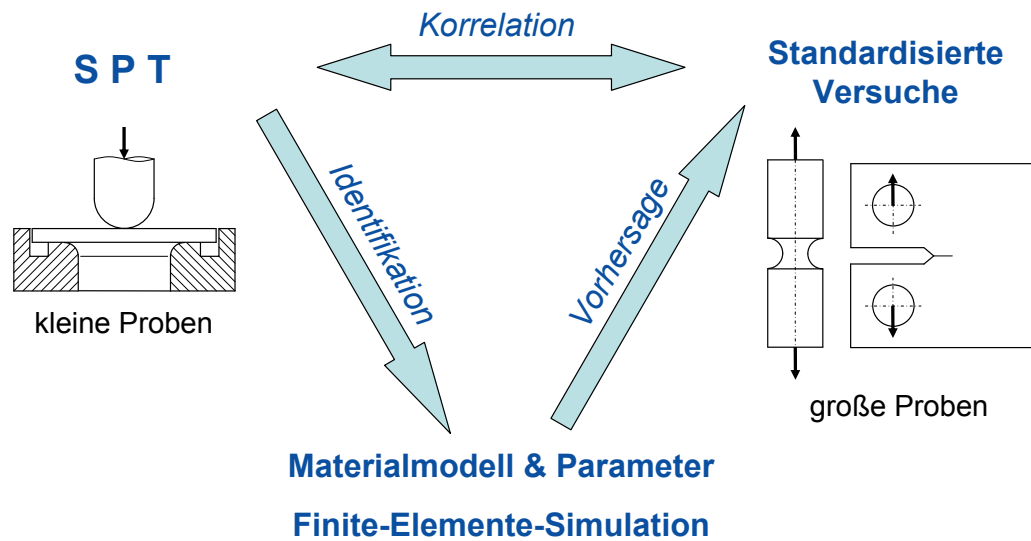


Abbildung 1.1: Identifikation von Materialparametern aus dem SPT und Übertragung auf Standardversuche an großen Proben zur Vorhersage des Verformungs- und Versagensverhaltens bei Sprödbbruch

kleine Verformungen auf, die erhöhte Anforderungen an die Messgenauigkeit stellen. Weil der SPT ursprünglich für duktile Werkstoffe entwickelt wurde, sind gegebenenfalls experimentelle Weiterentwicklungen erforderlich. Die zufällige Streuung der Festigkeit beim Sprödbbruch erfordert die Verwendung probabilistischer Versagensmodelle und eine größere Anzahl von Versuchen als im Fall des duktilen Versagens. Die materialsparenden scheibchenförmigen Proben ($\varnothing 8 \times 0,5 \text{ mm}$) im SPT erweisen sich dabei als Vorteil.

Mit Hilfe von FEM-Simulationen und der Response-Surface-Methode soll der nichtlineare Zusammenhang zwischen den Fließkurvenparametern der untersuchten Stähle und der Kraft-Verformungs-Kurve des SPT approximiert werden um anschließend die Parameter durch Minimierung der Abweichung zwischen Experiment und Simulation zu identifizieren. Hierfür müssen nichtlineare Optimierungsverfahren angewandt werden.

Mit den identifizierten Fließkurven kann dann die Kraft-Verschiebungs-Kurve des SPT bis zum spröden Versagen simuliert werden um den Spannungszustand zum Versagenszeitpunkt auswerten zu können. Erst nach dieser Vorarbeit wird es möglich, die sogenannten Weibull-Parameter der Sprödbbruchfestigkeit aus den streuenden Versagenslasten im SPT zu bestimmen. Für die Keramikproben müssen dagegen nur die elastischen Konstanten bekannt sein. Um zu überprüfen, ob die identifizierten Parameter auch auf anderen Probengeometrien und Belastungen übertragbar sind, müssen mit den gleichen Werkstoffen zusätzlich geeignete Referenzversuche durchgeführt werden.

Anschließend soll noch die Sprödbbruchzähigkeit von Stahl vorhergesagt werden, indem Bruchmechanikproben mit der Fließkurve und den Weibull-Parametern aus dem SPT

simuliert werden. Die Bruchzähigkeit von Keramik soll dagegen bestimmt werden, indem in die SPT-Probe ein scharfer Anriss eingebracht wird und sie bis zum Bruch belastet wird. Mit Hilfe von FEM-Simulationen soll für die mit einem Riss präparierte Probe der kritische Spannungsintensitätsfaktor berechnet werden.

1.2 Aufbau der Arbeit

Nach dieser Einleitung wird im **Kapitel 2** zunächst ein umfassender Literaturüberblick über den SPT gegeben. Im **Kapitel 3** werden die Ziele und Methoden dieser Arbeit näher erläutert und das Arbeitsprogramm beschrieben. **Kapitel 4** geht auf theoretische Grundlagen der Kontinuumsmechanik, der Plastizitätstheorie, der Identifikation konstitutiver Materialparameter, der Response-Surface-Methodik, der Bruchmechanik und der Weibulltheorie des Sprödbruchs für die in dieser Arbeit durchgeführten Berechnungen ein. **Kapitel 5** stellt die experimentellen Arbeiten, die untersuchten Werkstoffe und die zugehörige Probenpräparation sowie die primären Versuchsergebnisse vor. Im **Kapitel 6** werden die Finite-Elemente-Simulationen des Versuchs beschrieben und die Ergebnisse durchgeführter Parameterstudien vorgestellt. **Kapitel 7** beschreibt die Identifikation von Fließkurvenparametern. Im **Kapitel 8** werden die Weibull-Parameter des Sprödbruchs von Stahl und Keramik bestimmt und deren Übertragbarkeit überprüft. Das **Kapitel 9** beschreibt die Erprobung einer neuen Methode zur Bestimmung der Bruchzähigkeit von Keramik mit Small-Punch-Proben, in die Indenterrisse eingebracht wurden. Das abschließende **Kapitel 10** fasst die wichtigsten Ergebnisse zusammen. Im **Anhang** werden zusätzliche Informationen zur Verfügung gestellt sowie Werkzeuge und Daten dokumentiert, welche für die Reproduktion der Ergebnisse dieser Arbeit und für weiterführende Untersuchungen dienlich sein können.

2 Literaturüberblick zum Small-Punch-Test

2.1 Einführung

Zu Beginn der 1980er Jahre arbeiteten in den USA mehrere Forschergruppen an der Entwicklung von Kleinstprobentests mit geringem Materialbedarf. Die Motivation bestand darin, den aktuellen Werkstoffzustand in Reaktordruckbehältern von in Betrieb befindlichen Kernkraftwerksanlagen zu überprüfen [Man81]. Die zunehmende Neutronenversprödung des Druckbehälterstahls während der Betriebszeit erforderte eine Charakterisierung der Zähigkeits- und Festigkeitseigenschaften ohne das Bauteil dabei zu zerstören. Weil Versuche mit radioaktiv bestrahltem Material in sogenannten „Heißen Zellen“ mit Hilfe von Manipulatoren durchgeführt werden müssen, war nicht nur die minimalinvasive Probenentnahme sondern auch eine sehr einfache Probenpräparation und Versuchsdurchführung notwendig. Unabhängig voneinander entwickelten die Gruppen von MANAHAN et al. [Man81] am MIT¹ und HUANG et al. [Hua82] am HEDL² einen miniaturisierten Scheiben-Biegeversuch (MDBT) mit loser Auflage. BAIK et al. [Bai83] modifizierten die Versuchsanordnung, indem sie den Probenrand eingeklemmten. Seitdem wird dieser Kleinstprobenversuch als Small-Punch-Test (SPT) bezeichnet. Er eignet sich aufgrund der kleinen flachen Proben besonders gut für die lokale Probenentnahme an der Oberfläche von großen Bauteilen. Als weiterer Pluspunkt wird die zweiachsige Belastung angesehen, die den realen Bedingungen im Bauteil oft näher kommt als die Belastung im Zugversuch. Die Entwicklung von entsprechenden Probenentnahmegerten [Mer89, Fou96] trug maßgeblich zur verbreiteten Anwendung des SPT bei. Der Überblick im folgenden Abschnitt wird allerdings zeigen, dass es nicht nur den einen Small-Punch-Test gibt, sondern verschiedene Varianten eines miniaturisierten Versuchs an kleinen scheibenförmigen Proben, die zentrisch belastet werden.

¹Massachusetts Institute of Technology

²Hanford Engineering and Development Laboratory

2.2 Versuchsaufbau und Probenformen

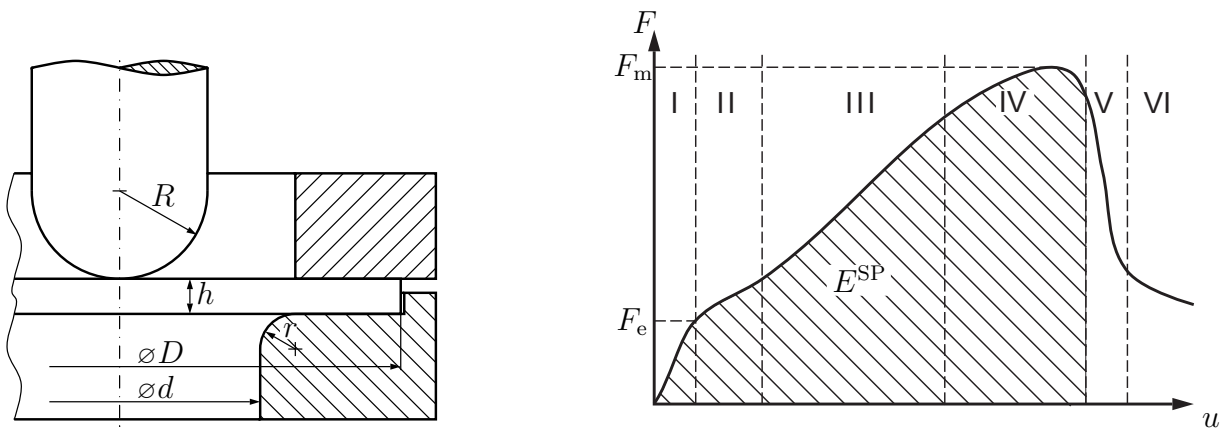


Abbildung 2.1: Prinzipskizze des Small-Punch-Tests mit Niederhalter und resultierende Kraft-Verschiebungs-Kurve des Stempels $F(u)$ mit charakteristischen Kennwerten.

Die Abbildung 2.1 links zeigt schematisch den prinzipiellen Versuchsaufbau mit Niederhalter, wie er zum Beispiel in den Veröffentlichungen [Lau00, Hus02, Abe03, Abe04a, Hus04, Kun04, Kun05, Abe06, Pen09, Cue10, Cue11] zu finden ist. Im Versuch liegt die scheibenförmige, kreisrunde Probe (Durchmesser D , Dicke h) auf einer kreisrunden Matrize (Bohrungsdurchmesser d , Tiefziehradius r) auf und wird zentrisch durch einen Stempel mit halbkugelförmiger Spitze (Radius R) belastet, während der Probenrand durch den Niederhalter eingeklemmt ist. Alternativ kann oben und unten vertauscht sein, der Stempel also von unten gegen die eingeklemmte Probe drücken [Fou92, Fou96, Kur97, Cat02, She02, Ser07]. Die Richtlinie CWA 15627 [CEN06] des europäischen Instituts für Normung (CEN) schlägt für die Prüfung metallischer Werkstoffe eine Standardgeometrie (Tabelle 2.1) vor, die weitestgehend der Skizze in Abbildung 2.1 entspricht, jedoch anstatt des Tiefziehradius r eine 0,2 mm breite Fase mit 45° Neigung vorsieht. Diese Variante wird zum Beispiel bei [Mil02, Mil06] verwendet.

Tabelle 2.1: Standardgeometrie (mm) für den SPT nach [CEN06]

D	h	R	d	r
8	0,5	1,25	4	0,2

In vielen Versuchsanordnungen wird für die Stempelspitze eine Kugel in Kombination mit einem die Kugel führenden Niederhalter verwendet [Bai83, Mao87, Mis87, Mis89, Mao91, Mao91a, Li91a, Kam92, Suz92, Eto93, Sin93, Vor95, Che96, Bul98, Bro99, Fle98, Che00, Son00, Kas01, Jia03, Zid03, Kim05, Iss06, Mil06, Ega07a, Ser07, Che08, Fin08, Wan08, Kat09, Ma10], weshalb der Test von einigen Autoren auch als „Ball-Punch-Test“ [McN91] oder „Small-Ball-Punch-Test“ bezeichnet wird [Cam04, Cam05, Cam09].

Ein Versuchsaufbau ohne Niederhalter ist selten, folgt jedoch der ursprünglichen Form des miniaturisierten Scheiben-Biegeversuchs [Man81, Hua82, Man86] und wird in neueren Arbeiten an der TU Bergakademie Freiberg [Ras06, Ras08, Kun10a, Ras10] und im Forschungszentrum Dresden Rossendorf [Lin08, Lin08a, Lin08b] genutzt.

Außer den Proben mit 8 mm Durchmesser werden auch noch kleinere Proben mit einem Durchmesser von 3 mm und einer Dicke von 0,25 mm verwendet, die nicht größer sind als Probenrohlinge für die Transmissionselektronenmikroskopie (TEM). Sie kamen bereits in den ersten Veröffentlichungen [Man81, Hua82] zum Einsatz und werden bis heute häufig verwendet [Mao87, Mao87a, Mis87, Li91a, McN91, Kam92, Suz92, Eto93, Vor95, Shi00, Son00, Kas01, Rua02, Jia03, Cam04, Fin04, Fin08, Oku09, Kat09]. Neben den kreisrunden finden auch quadratische Proben der Kantenlänge 10 mm Verwendung [Bai83, Kam86, Mao87a, Mis87, Mis89, Mao91, Mao91a, Kam92, Eto93, Che96, Fle98, Che00, Kim05, Che08, Con08, Lin08, Pen09, Ma10].

2.3 Versuchsdurchführung, -ergebnis und -kennwerte

Während des verschiebungsgesteuerten Versuchs werden das Kraftsignal F der Prüfmaschine und die Verschiebung u des Stempels gemessen. Das wesentliche Versuchsergebnis ist also die Kraft-Verschiebungs-Kurve des Stempels, die in dieser Arbeit auch kurz als F - u -Kurve bezeichnet wird. Auf der rechten Seite von Abbildung 2.1 ist eine typische F - u -Kurve für einen duktilen Stahl zu sehen. Der Kurvenverlauf kann in mehrere charakteristische Abschnitte unterteilt werden, welche mit römisch I bis VI bezeichnet sind. Der elastische Anstieg im Abschnitt I beschreibt die zunächst elastische Plattenbiegung der Small-Punch-Probe (SP-Probe). Im Abschnitt II plastifiziert der Probenquerschnitt von der Mitte beginnend zunehmend, es liegt elastisch-plastische Biegung vor. Nachdem die Probe durchplastifiziert ist, verfestigt das Material im Abschnitt III. Im degressiv ansteigenden Kurvenabschnitt IV übersteigt die zunehmende geometrische Entfestigung und die beginnende duktile Materialschädigung die Materialverfestigung im am stärksten verformten Probenbereich. Die Probe beginnt sich etwas außermittig zwischen Stempel und Matrizenauflage einzuschnüren. Die Lokalisierung der Schädigung nach dem Kraftmaximum führt zu Beginn von Abschnitt V zur Anrissbildung an sich vereinigenden Poren und Mikrorissen und folglich zu duktilem Risswachstum verbunden mit einem steilen Kraftabfall. Der Riss breitet sich in Umfangsrichtung im eingeschnürten Bereich der Probe aus. Die verbleibende Kraft im Abschnitt VI wird für das Durchdrücken des Stempels durch die angerissene hutförmig verformte Probe benötigt.

Versprödet ein duktiles Metall bei tieferen Temperaturen, so wird der Kraftabfall zunehmend steiler, das Kraftmaximum verschiebt sich nach links in den Bereich III. Andere

Ursachen der Versprödung können aber auch Alterung, radioaktive Bestrahlung, thermomechanische Beanspruchung oder weitere betriebsbedingte Umwelteinflüsse sein. Der Sprödbbruch ist in der F - u -Kurve des SPT am plötzlichen instabilen Kraftabfall nach Erreichen des Kraftmaximums erkennbar. Nach dem Versuch liegt eine in mehrere Teile zerbrochene plastisch verformte Probe mit Spaltbruchflächen in radialer Richtung vor. Am weitesten nach links verschoben zeigt sich das Kraftmaximum im Falle von Keramikproben, welche ohne plastische Verformung bereits im Bereich I der Kurve versagen.

Charakteristische Kennwerte des Versuchs sind in die F - u -Kurve, Abbildung 2.1 rechts, eingezeichnet. F_m bezeichnet die maximale Kraft im Versuch. F_e ist als die Kraft beim Übergang vom elastischen Bereich in den plastischen Bereich definiert. Die schraffierte Fläche unter der Kurve wurde von BAIK et al. [Bai83] als Small-Punch-Bruchenergie E^{SP} definiert:

$$E^{\text{SP}} = \int_0^{u_f} F(u) du. \quad (2.1)$$

Die Integration erfolgt bis zur Versagensverschiebung u_f , welche als die Verschiebung festgelegt wurde, bei der die Kraft nach dem Kraftmaximum F_m um 20% abgefallen ist [CEN06]. Ebenfalls ein charakteristischer Kennwert im Sinne einer Brucheinschnürung ist die Probendicke bei Versagen h_f an der dünnsten Stelle im Querschnitt. Wie diese Kennwerte am besten ermittelt werden, kann im europäischen Normentwurf [CEN06] nachgelesen werden. Dort sind auch Richtlinien für die Versuchsdurchführung zu finden.

Die einfachste Möglichkeit, Materialcharakterisierung mit dem SPT zu betreiben, ergibt sich aus der Interpretation des charakteristischen Verlaufs der F - u -Kurve und dem relativen Vergleich von F - u -Kurven und ihren charakteristischen Kennwerten. Damit sind natürlich keine quantitativen Aussagen über die Materialeigenschaften möglich, sondern nur qualitative. Und die Aussagen sind nur sinnvoll, wenn die quantitativen Materialeigenschaften eines Referenzmaterials, das zuvor im SPT geprüft wurde, bekannt sind.

2.4 Materialcharakterisierung mit dem SPT

2.4.1 Untersuchte Werkstoffe

Während die Vorteile des SPT mit seiner einfachen Handhabung, dem geringen Materialverbrauch und der bauteilnahen mehrachsigen Belastung anfangs nur für die Ermittlung von Materialkennwerten duktiler metallischer Werkstoffe (siehe CWA 15627, Part B [CEN06]) oder in der Variante des Small-Punch-Creep-Tests (siehe CWA 15627, Part A [CEN06] oder [Ule99, Dob01]) für die Charakterisierung des Kriechverhaltens von Metallen genutzt wurden, fand er später auch Anwendung in der Prüfung von Polymerkunststoffen für medizinische Implantate [Kur97, Arn98, Edi01, Gid01, Aka06]. Für die Be-

stimmung der mechanischen Kennwerte von Kunststoffimplantaten aus UHMWPE (Ultra High Molecular Weight Polyethylen) hat sich der SPT sogar innerhalb weniger Jahre als Standardprüfverfahren etabliert, seit 2002 existiert der ASTM-Standard F2183 [AST02].

Nur vereinzelte Veröffentlichungen japanischer und chinesischer Autoren belegen bisher die Verwendung des SPT für keramische Werkstoffe. Bei näherer Betrachtung zeigt sich, dass meist auch keine ideal spröden, sondern Werkstoffe mit plastischem Verformungsanteil untersucht wurden (Bruchverhalten von Stahl-ZrO₂-Keramik-Kompositen [Kaw89] bei Raumtemperatur, plastische Duktilität von Kompositen aus Molybdän und teilstabilisierter ZrO₂-Keramik bei hohen Temperaturen [Jia95, Xio05], mechanische Eigenschaften plasmagespritzter Keramik-Metall-Komposite [Li98], temperaturabhängige Materialeigenschaften von Keramikwerkstoffen bei hohen [Li99] und sehr hohen Temperaturen bis zu 1600 °C [Sai91]). Anwendungen des SPT für spröd-elastisches Materialverhalten sind lediglich die folgenden: Thermoschockfestigkeit von Keramik [Li91], Bruchverhalten von PZT-Piezoelektrika (Blei-Zirkonat-Titanat) unter Einwirkung elektrischer Felder [Shi03], mechanische Festigkeit von PLZT-Piezoelektrika (Blei-Lanthan-Zirkonat-Titanat) [Xio05a]), Ermüdung von Aluminiumoxidkeramik [Xio07].

Außer bei hohen Temperaturen wurde der SPT auch schon mehrfach bei tiefen Temperaturen weit unterhalb 0 °C durchgeführt (mit flüssigem Stickstoff oder flüssigem Helium als Kühlmittel) [Bai83, Mis89, Eto93, Vor95, Che00, Shi00, Rua02, Kim05, Fin08]. Dabei ging es hauptsächlich um Stähle und die Bestimmung der Übergangstemperatur zwischen der Hoch- und Tieflage der Zähigkeit.

2.4.2 Empirische Korrelationen mit Kennwerten aus dem SPT

Der bisherige Stand der Technik bei der Materialcharakterisierung mit dem SPT besteht darin, charakteristische Kennwerte des Versuchs mit Materialkennwerten aus standardisierten Versuchen an Zugproben oder Bruchmechanikproben zu korrelieren. Die empirischen Korrelationen werden im Folgenden kurz erläutert.

Im Vordergrund stand zunächst die Bestimmung der spröd-duktilen Übergangstemperatur und der Bruchzähigkeit von ursprünglich duktilen Metallen, die jedoch während des Betriebs versprödeten. BAIK et al. [Bai83] untersuchten die Beziehung zwischen der Small-Punch-Bruchenergie E^{SP} und der Bruchenergie aus dem Kerbschlagbiegeversuch mit Charpy-V-Kerb-Proben am Beispiel einer anlassversprödeten Stahllegierung. Sie stellten fest, dass sich die spröd-duktilen Übergangstemperatur im SPT, T_{SP}^3 , mit der Übergangstemperatur des CharpyTests, FATT (fracture appearance transition temperature), linear korrelieren lässt. T_{SP} ist deutlich niedriger als der FATT-Wert. Als Ursache wird die

³Temperatur bei der E^{SP} den Mittelwert zwischen der Zähigkeitshochlage und -tieflage erreicht.

statische zweiachsige Belastung im SPT gegenüber der dynamischen dreiachsigen Belastung im Charpy-Test angesehen. Zu prinzipiell gleichen Ergebnissen kamen auch MISAWA et al. [Mis87] für andere Stahllegierungen bei abweichender Probenform. Nach einigen weiteren Veröffentlichungen der gleichen Art betrachtete BULLOCH [Bul98] die bis dahin aus der Literatur verfügbaren Daten über lineare Korrelationen kritisch und schlug eine verbesserte nichtlineare Beziehung zwischen T_{SP} und FATT vor.

MAO et al. [Mao87, Mao87a] betrachteten die Dickenänderung an der dünnsten Stelle im verjüngten Querschnitt der SP-Probe und definierten als Versagenskriterium die zweiachsige Bruchdehnung $\varepsilon_f = \ln(h_0/h_f)$. Sie konnten eine lineare Beziehung zwischen ε_f und der mit CT-Proben ermittelten Bruchzähigkeit J_{Ic} ermitteln. Dagegen stellten SINCLAIR et al. [Sin93] in ihren SPT-Untersuchungen an einer Vielzahl von duktilen Metalllegierungen fest, dass die Beziehung zwischen ε_f und J_{Ic} nicht durch eine lineare Korrelation wiedergegeben werden kann. Dennoch wurden nach MAO et al. mehrfach wechselseitige lineare Korrelationen zwischen ε_f , E^{SP} und J_{Ic} publiziert (Literaturüberblick siehe [Bul04]).

Häufig interessieren auch Kennwerte aus dem einachsigen Zugversuch. MAO et al. [Mao87] ermittelten lineare Korrelationen zwischen dem auf die quadrierte Probendicke bezogenen Kraftmaximum F_m/h_0^2 und der Zugfestigkeit R_m als auch zwischen dem Wert F_e/h_0^2 und der Streckgrenze R_e im Zugversuch. Dieser Zusammenhang wurde später auch von anderen bestätigt (z.B. [Eto93]).

Es werden immer wieder ähnliche Korrelationen wie die soeben beschriebenen veröffentlicht, die keine neue Methodik anwenden, sondern ihren Neuigkeitswert daher beziehen, dass andere Werkstoffe untersucht wurden oder andere Prüfbedingungen herrschten und als Ergebnis andere Zahlenwerte für die linearen oder nichtlinearen Korrelationsbeziehungen erhalten wurden. Ein aktuelles Beispiel liefern KATO et al. [Kat09], die lineare Beziehungen zwischen Ergebnissen aus dem SPT und dem Zugversuch nutzen, um mechanische Eigenschaften einer Elektronenstrahlschweißnaht bei 600 °C zu bestimmen. Es ist jedoch bis heute nicht gelungen, ein allgemein gültiges Gesetz für die Beziehung zwischen SPT-Kennwerten und Materialkennwerten aus konventionellen Versuchen zu bestimmen. Der wesentlichen Nachteil der empirischen Gleichungen besteht darin, dass parallel zum SPT immer Bruchmechanik- oder Zugversuche durchgeführt werden müssen, sobald ein anderer Werkstoff oder eine abweichende Versuchsgeometrie verwendet wird.

2.4.3 Anwendung numerischer Simulationen

Bereits in der ersten und oft zitierten Veröffentlichung zum SPT von MANAHAN et al. [Man81] (der dort allerdings als „Miniaturized Disk Bend Test“ bezeichnet wird) wurde ein einfaches FEM-Modell für den SPT entwickelt, um das Materialverhalten und den Einfluss der Reibung zu studieren. Die Arbeiten von MANAHAN am MIT [Man82] verfolgten das

Ziel, die in der gemessenen F - u -Kurve enthaltenen Informationen in nutzbare Materialdaten, genauer gesagt in Spannungs-Dehnungs-Kurven, zu überführen. Aus dem Vergleich zwischen der mit der FEM simulierten und der gemessenen Kraft-Verschiebungs-Kurve sollten Veränderungen der einachsige Fließkurve von neutronenversprödeten Metalllegierungen abgeleitet werden. Die wesentlichen Schritte der inversen Strategie werden etwas später genauer beschrieben [Man86]. Ausgehend von der bekannten Fließkurve des unbestrahlten Materials wird diese manuell variiert, die Kraft-Verschiebungs-Antwort für die variierten Fließkurven mit Hilfe der FEM berechnet, die simulierten mit der gemessenen Kurve verglichen, bei Bedarf eine neue Variation ausprobiert und gegebenenfalls zwischen Kurven der so entstandenen Datenbasis interpoliert. Liegt die gemessene Kurve zwischen zwei Kurven der Datenbasis oder stimmt sie mit einer Kurve der Datenbasis überein, so gilt die Fließkurve als ermittelt. Wesentliche Nachteile der damals verfolgten Strategie waren zum einen, dass die Anpassung der konstitutiven Materialparameter manuell durch Probieren erfolgte, und zum anderen, dass im verwendeten FEM-Code ABAQUS damals nur die Theorie kleiner Deformationen implementiert war. Letztendlich wurde zwar eine erfolgversprechende Methode vorgestellt, jedoch nicht zur Anwendungsreife gebracht, es wurden keine belastbaren Identifikationsergebnisse publiziert. Die auf die erste folgenden Publikationen [Man82, Man83, Man86] wurden nur sehr selten zitiert. Das Potential des SPT für die inverse Bestimmung von Materialparametern mit Hilfe von FEM-Simulationen und variierten Materialparametern geriet schließlich in Vergessenheit. Stattdessen wurden mehrere Jahre nur die zuvor beschriebenen Korrelationsbeziehungen verwendet.

Erst Mitte der 1990er Jahre begann man den SPT auf direktem Wege für die Identifikation von elastisch-plastischen und schädigungsmechanischen Materialparametern zu nutzen. Ein Meilenstein ist die vielzitierte Veröffentlichung von FOULDS et al. [Fou95]. Sie versuchten mit Hilfe der FEM erstmals die Bruchzähigkeit (K_{Ic} oder J_{Ic}) direkt aus dem Versuchsergebnis des SPT abzuschätzen. Sie verwendeten die kritische Verzerrungsenergiedichte am Ort der Rissinitiierung in der SP-Probe als Versagenskriterium. Damit sagten sie die kritische Last für eine simulierte Kompaktzugprobe voraus (Verzerrungsenergiedichte über eine Länge gemittelt) und bestimmten schließlich für die Geometrie mittels Handbuchlösung die Bruchzähigkeit J_{Ic} . Die Methode beinhaltet auch die Schätzung der einachsigen Spannungs-Dehnungs-Kurve aus der Kraft-Verschiebungs-Kurve des SPT. Durch den Vergleich der gemessenen Kurve mit einer Datenbasis aus simulierten Kraft-Verschiebungs-Kurven mit bekannten Materialparametern wurde die passendste Spannungs-Dehnungs-Beziehung erhalten. Das konstitutive Modell war ein modifiziertes Ramberg-Osgood-Modell für niedriglegierte Stähle, welches als Parameter den Elastizitätsmodul und drei Parameter der Fließkurve enthält. Allerdings wurden zwei Parameter vorgegeben und nur zwei Parameter der Verfestigungskurve identifiziert.

Mit dem Ziel echte geometrieunabhängige Materialkennwerte aus dem Versuchsergebnis des SPT zu bestimmen wird nun in einem zunehmenden Anteil der Veröffentlichungen die FEM verwendet. Häufig werden allerdings noch aus dem Zugversuch ermittelte Spannungs-Dehnungs-Kurven [Wan08, Hu09] oder Schädigungsparameter [Zho09] verwendet. In Ergänzung wird dann manchmal noch von Hand eine Anpassung der Fließkurve durchgeführt, um eine bessere Übereinstimmung mit der gemessenen SPT-Kurve zu erzielen [Cam04, Cam05, Spä05, Cue10]. Dies stellt dennoch einen großen Fortschritt dar, weil nun nicht mehr nur geometrieabhängige globale Messwerte, sondern auch lokale kontinuumsmechanische Größen wie Spannungen, Dehnungen oder Verzerrungsenergiedichten in die Auswertung des SPT einfließen. Obwohl die gemessene Materialantwort der verschiedenen, im Abschnitt 2.2 vorgestellten, SPT-Konfigurationen voneinander abweicht, sollten auf Basis kontinuumsmechanischer Größen in den FE-Simulationen vergleichbare Ergebnisse erhalten werden. Korrelationen zu Versuchsergebnissen an großen Standardproben können dann geometrieunabhängig mit lokalen Spannungs- und Verzerrungsgrößen erfolgen.

Aufschlussreich sind Parameterstudien mit der FEM, welche den Einfluss der Modellparameter (Geometrie, Kontakt, Material) auf das Versuchsergebnis aufzeigen (z.B. [Bro99, Ver08]). Sie sind eine notwendige Vorarbeit für die Identifikation der Materialparameter aus dem SPT, da nur solche Parameter sinnvoll identifiziert werden können, deren Änderung sich auch auf das Versuchsergebnis auswirkt.

Eine Vorstufe oder vereinfachte Methode zur Fließkurvenbestimmung stellen lineare Korrelationen zwischen der Form der Fließkurve und der Form der simulierten F - u -Kurve dar [Cam09]. Dabei wird allerdings ein a-priori-Wissen über ein bekanntes Ausgangsmaterial vorausgesetzt, dessen mechanische Eigenschaften sich dann infolge Bestrahlung oder Alterung ändern. Man kann sich das als eine Linearisierung um eine bekannte Referenzkurve vorstellen, bei der ein linearer Ansatz für die Beziehung zwischen Materialparameter (z.B. Streckgrenze) und Materialantwort im SPT (z.B. F_e) auf Basis von FEM-Simulation kalibriert wird. Diese Methode erfordert keine parallele Durchführung von Zugversuchen, sobald eine Referenzfließkurve bekannt ist. Allerdings ist sie ungeeignet für Materialien, von denen kein a-priori-Wissen über das konstitutive Materialverhalten vorhanden ist.

CATHERINE et al. [Cat02] bestimmten zwei Parameter eines Ramberg-Osgood-Ansatzes mit Hilfe einer Referenzfließkurve. Die Abhängigkeit der simulierten F - u -Kurve von den beiden Materialparametern approximierten sie durch lineare Beziehungen zwischen dem mittleren Kraftverhältnis aus der Kurve mit variiertem Parameter und der Referenzkurve. Es wird also jeweils ein Parameter variiert, während der andere festgehalten wird.

Sowohl ZIDAN et al. [Zid03] als auch ISSELIN et al. [Iss06] bestimmten konstitutive Materialparameter durch Minimierung der Abweichung zwischen Experiment und FE-

Simulation mit der Downhill-Simplex-Methode (auch Nelder-Mead-Methode [Nel65]). Innerhalb des Optimierungsalgorithmus werden wiederholt FE-Rechnungen durchgeführt, allerdings werden keine Ableitungen nach den Materialparametern benötigt. Für die Bestimmung einer Startnäherung wird eine Datenbasis aus zuvor simulierten Kraft-Verschiebungs-Kurven verwendet. ZIDAN et al. bestimmten zwei Parameter eines Ramberg-Osgood-Ansatzes, allerdings weist das Identifikationsergebnis bei kleinen Verschiebungen eine sehr deutliche Abweichung zur gemessenen Kurve auf. ISSELIN et al. konnten dagegen erfolgreicher die zwei Parameter der Hollomon-Gleichung bestimmen. Bei dem Versuch, die dreiparametrische Ludwik-Hollomon-Gleichung zu identifizieren, kam es bereits zu mehrdeutigen Parametersätzen, welche das Experiment gleich gut abbilden konnten.

HUSAIN et al. [Hus04] bestimmen den Elastizitätsmodul und die Fließkurve durch schrittweise Anpassung der simulierten Kraft-Verschiebungs-Kurve an die gemessene. Beginnend beim elastischen Bereich wird in jeder Iteration ein kleiner Abschnitt der F - u -Kurve hinzugefügt und durch fitten ein neuer Punkt der Fließkurve erhalten.

Einen deutlichen Schritt weiter gingen ABENDROTH und KUNA indem sie erstmals für die Simulation des duktilen Versagens im SPT das schädigungsmechanische Materialmodell von Gurson-Tvergaard-Needleman (GTN) verwendeten und für die Parameteridentifikation mehrere künstliche neuronale Netze in Verbindung mit einer Optimierungsroutine einsetzten [Abe03, Abe04, Abe04a, Kun04, Kun05, Abe06]. Neuronale Netze sind in der Lage den nichtlinearen Zusammenhang zwischen den Materialparametern und der Kraft-Verschiebungs-Kurve zu approximieren. Für das Training des neuronalen Netzes diente jeweils eine Datenbasis von simulierten Kraft-Verschiebungs-Kurven mit systematisch variierten Materialparametern. Die Parameter wurden durch Minimierung der Abweichung zwischen gemessener und der durch das neuronale Netz approximierten Kraft-Verschiebungs-Kurve identifiziert. Im ersten Schritt wurden für mehrere duktile Stähle und einen Gusseisenwerkstoff mit Hilfe eines neuronalen Netzes drei bzw. vier Fließkurvenparameter identifiziert. Im zweiten Schritt wurden bei nun bekannter Fließkurve mit je einem neuronalen Netz bis zu fünf Schädigungsparameter des GTN-Modells identifiziert. Im dritten Schritt wurde mit den identifizierten Parametern das duktile Versagensverhalten von Bruchmechanikproben mit Hilfe von FE-Simulation vorhergesagt.

Künstliche Neuronale Netze kommen später auch bei anderen Forschergruppen für die Bestimmung konstitutiver Materialparameter zum Einsatz [Lin06, Che08, Lin08, Lin08a, Lin08b]. Ohne Neuronale Netze, aber mit Hilfe quadratischer Modelle der Statistischen Versuchsplanung (Design of Experiments), bestimmen später PEÑUELAS et al. [Pen09] und CUESTA et al. [Cue10] duktile Schädigungsparameter des GTN-Modells. Insgesamt wurden vier Parameter bestimmt, allerdings nicht gleichzeitig, sondern abschnittsweise in den charakteristischen Bereichen III, IV und V der F - u -Kurve (Abb. 2.1).

Der Autor selbst [Ras06, Ras08] verfolgt zur Fließkurvenbestimmung eine Strategie, die an die Idee von MANAHAN [Man86] anknüpft. Der Vergleich mit Kurven einer Datenbasis mit variierten Fließkurvenparametern und die Interpolation zwischen Kurven der Datenbasis erfolgt allerdings nicht mehr manuell nach dem Prinzip Versuch und Irrtum sondern systematisch und automatisiert. Dabei kommen die Response-Surface-Methode und nicht-lineare Optimierungsmethoden zur Anwendung. Theorie, Umsetzung und Ergebnisse der Strategie werden in dieser Arbeit vorgestellt.

2.4.4 Experimentelle Weiterentwicklungen

Die übliche Wegmessung beim SPT liefert keine Informationen über die Gestalt der verformten Probe während des Versuchs, da nur die globale Probenverformung in Form der Stempelverschiebung oder der Verschiebung eines Messtasters auf der gegenüberliegenden Zugseite erfasst wird. Es gibt nun vereinzelte Bestrebungen, die Verformung der Probenunterseite optisch zu erfassen. ABENDROTH [Abe03, Abe04] verwendet zwei CCD-Kameras und ein Objektrasterverfahren, um die Verschiebungsfelder zu bestimmen. Aufgrund der auftretenden Probleme bei großen Probenverformungen wurde die Methode aber nicht weiter verfolgt, jedoch ermöglichte sie, den Zeitpunkt der Rissinitiation visuell zu bestimmen und das Risswachstum zu verfolgen. EGAN et al. [Ega07a] stellten eine experimentell aufwendige und hochauflösende Methode vor, bei der das dreidimensionale Profil der Probenoberfläche während des Versuchs mittels eines interferometrischen Messsystems bestimmt wird. Durch die Minimierung des Fehlers zwischen gemessenem und simuliertem Profil der verformten Probe wurden drei Parameter eines Potenzansatzes bestimmt [Ega07].

Sehr aktuell sind Methoden zur direkten Bestimmung der Bruchzähigkeit mit dem SPT. Dazu wird in die SP-Probe eine Kerbe oder ein Startriss eingebracht, die so modifizierte Probe belastet und der Spannungszustand am Riss mit der FEM ausgewertet. JU et al. [Ju03] verwendeten quadratische Probenscheiben ($10 \times 10 \times 0,5$ mm) aus Stahl, in die mittels Drahtsägen ein gekerbtes Loch vom Querschnitt einer konvexen Linse eingebracht wurde (Rissspitzenradius $20 \mu\text{m}$). TANAKA et al. [Tan09] brachten ebenfalls in rechteckige SP-Proben ($10 \times 10 \times 1$ mm) aus Stahl mittels Erodieren ein Loch in Form einer langezogenen Kerbe ein und erzeugten anschließend Ermüdungsanrisse zu beiden Seiten der Kerbe. CUESTA und ALLEGRE [Cue11] laserten einen geraden Oberflächenriss konstanter Tiefe (Verhältnis Risstiefe zu Probendicke $a/h = 0,2 - 0,6$) in rechteckige SP-Proben ($20 \times 20 \times 1$ mm) aus Stahl. RASCHE et al. [Ras10] brachten mit Hilfe eines Vickers-Indenters halbelliptische Oberflächenrisse in runde Proben ($\varnothing 8 \times 0,6$ mm) aus Keramik ein.

3 Forschungsziele und Methoden

Qualifizierung des SPT als eigenständige Prüfmethode

In der Werkstoffprüfung hat sich der SPT bislang nur in Verbindung mit Korrelationen zu Versuchsergebnissen mit konventionellen Zug- und Bruchmechanikproben etabliert. Die Qualifizierung des SPT als eigenständige Prüfmethode ist jedoch besonders erstrebenswert für die technischen Anwendungsfälle, in denen schlicht nicht genug Probenmaterial für vergleichsweise große Standardproben verfügbar ist. Veröffentlichungen mehrerer Forschungsinstitute aus den letzten Jahren zeigten, dass auch direkt aus dem Versuchsergebnis des SPT Materialparameter mit Hilfe numerischer Simulationen gewonnen werden können, ohne auf andere Experimente angewiesen zu sein. Das nichtlineare mechanische Randwertproblem mit inhomogener Beanspruchung, nichtlinearem Materialverhalten, Kontakt und Reibung wird übereinstimmend mit der FEM simuliert. Die anschließend für die Parameteridentifikation verwendeten Methoden und ihre Praxistauglichkeit unterscheiden sich dagegen erheblich. Während die Präparation der SP-Proben, die Durchführung des Experiments und Ermittlung technischer Kennwerte auch dank der Richtlinie CWA 15627 [CEN06] keine besonderen Probleme bereitet, stellt die komplizierte und aufwendige Parameteridentifikation ein wesentliches Hindernis für die Anwendung des SPT außerhalb der Forschung dar. Für die Etablierung des SPT als zuverlässige eigenständige Prüfmethode ist die Bereitstellung von Auswertungsalgorithmen erforderlich, welche eine zeiteffiziente Auswertung der Messergebnisse ermöglichen und zugleich die Reproduktion der Identifikationsergebnisse gestatten. Letztendlich muss es das Ziel sein, den Technikern und Ingenieuren, welche die Werkstoffprüfung durchführen, auch entsprechende Auswertungsprogramme oder gar Auswertungsformeln zur Verfügung stellen zu können. Diese Arbeit soll einen Beitrag dazu leisten, die Qualifizierung des SPT in diesem Sinne voranzutreiben.

Werkstoffauswahl

Der Schwerpunkt der Untersuchungen liegt auf der Bestimmung von Materialparametern für Werkstoffe, die aufgrund äußerer Einflüsse verspröden oder bei Raumtemperatur von Natur aus spröde sind. Um den Umfang dieser Arbeit zu begrenzen, wird sich auf die Charakterisierung der Versprödung von Stählen bei tiefen Temperaturen, lokal veränder-

liche Materialeigenschaften in einer Schweißnaht und den Spröbruch einer technischen Keramik beschränkt. Bei der Suche nach geeigneten Werkstoffen ist es sinnvoll solche auszuwählen, die bereits gut charakterisiert sind (spart Zeit und Kosten) und deren minimalinvasive Prüfung mit dem SPT auch zukünftig von Interesse sein könnte. Es wurden folgende Beispielwerkstoffe gewählt:

- zwei ferritische Druckbehälterstähle (22NiMoCr37 und 18Ch2MFA) und deren Versprödung infolge tiefer Temperaturen,
- ein lasergeschweißter Stahl (EMZ355) mit lokal veränderlichem Gefüge,
- eine ideal spröde Aluminiumoxidkeramik (Rubalit708S) für die Elektronikindustrie.

Unterschiedliche Werkstoffe erfordern auch speziell angepasste Probenentnahme- und Präparationstechniken, die jeweils dokumentiert werden müssen.

SPT für tiefe Temperaturen

Die Untersuchung der Versprödung von Stählen mit dem SPT erfordert tiefe Prüftemperaturen weit unterhalb 0 °C. Hierfür wurde am IMFD eine Kühlapparatur entwickelt, die flüssigen Stickstoff als Kühlmittel verwendet und in eine konventionelle Zug-Druck-Prüfmaschine eingebaut werden kann. Mit der Kühleinrichtung muss sich die Temperatur in der Probe möglichst genau einstellen lassen. Weitere Anforderungen waren ein einfacher und preiswerter sowie platzsparender Aufbau.

SPT für lokal veränderliche Materialeigenschaften in Schweißnähten

Wenn sich das Materialgefüge wie in einer Schweißnaht lokal ändert, ändern sich auch die mechanischen Eigenschaften. Üblicherweise werden diese mit Härtemessungen charakterisiert, denn die Querschnittsausdehnung der Schmelzzone und der Wärmeeinflusszone liegt häufig im Bereich weniger Millimeter oder beim Laserstrahl- und Elektronenstrahlschweißen gar im Submillimeterbereich. Die dünnen SPT-Proben bieten die Möglichkeit wahre Materialparameter für die einzelnen Wärmebehandlungsgefüge in der Schweißnaht zu bestimmen. Die Schwierigkeit besteht in der treffsicheren lokalen Probenentnahme.

SPT für spröde Werkstoffe

Der SPT wurde in erster Linie für die Prüfung duktiler metallischer Werkstoffe konzipiert. Der plastische Verformungsanteil wird bei Metallen mit zunehmender Versprödung jedoch kleiner, bei Keramikwerkstoffen fehlt er gänzlich. Die messbare Verformung ist bei Keramik demzufolge bedeutend kleiner als bei duktilen Metallen. Schon geringe Abweichungen

von einer ideal ebenen Oberfläche führen zu undefinierten Auflage- und Lastbedingungen, die zusätzliche Druck- und Biegespannungen verursachen, die nicht durch plastische Deformation abgebaut werden können. Der Niederhalter wirkt wie eine Einspannung der Probe, die mit zusätzlichen unerwünschten Spannungen einhergeht. Üblicherweise erfolgt deshalb die Festigkeitsprüfung von Keramikwerkstoffen mit ein- oder zweiachsigen Biegeversuchen, bei denen die Probe lose aufliegt ohne eingespannt zu werden. Der SPT soll deshalb ohne Niederhalter verwendet werden. Dies entspricht dann der Urform als Scheibenbiegeversuch [Man81, Hua82].

Identifikation von Fließkurven

Die Kraft-Verschiebungs-Kurve des SPT repräsentiert die nichtlineare Antwort des Materials auf die Belastung der Probe durch den Stempel. Das in der Kurve enthaltene Informationspotential über das konstitutive Materialverhalten soll für die Identifikation der Fließkurve von Stählen ausgereizt werden. Die elastisch-plastischen Materialparameter sind unbekannte Eingangsgrößen für das Experiment, ihre Identifikation erfordert die Lösung des sogenannten inversen Problems. Die Lösung des direkten Problems, also die Berechnung der Versuchsantwort bei vorgegebenen Eingangsgrößen kann mit Hilfe von FEM-Simulationen erfolgen. Zunächst muss der Einfluss der Materialparameter auf das Messergebnis untersucht werden, denn nur wenn die Kraft-Verschiebungs-Kurve sensitiv genug bezüglich eines Materialparameters ist, kann dieser auch identifiziert werden. FEM-Parameterstudien liefern diese Informationen. Aber auch andere Modellparameter (Geometrie, Reibung) beeinflussen die F - u -Kurve und gleichzeitig die Spannungen und Verformungen in der Probe. Sie müssen ebenfalls untersucht werden. Die Parameteridentifikation beruht im Grunde darauf, die Abweichung zwischen der simulierten Materialantwort und der im Experiment gemessenen Materialantwort zu minimieren. Damit während der Optimierung nicht ständig neue FEM-Berechnungen erforderlich sind, soll für die Approximation des direkten Problems die Response-Surface-Methode zum Einsatz kommen. Dabei wird die nichtlineare Abhängigkeit der Stempelkraft von den Materialparametern durch bereichsweise lineare oder quadratische Interpolation zwischen simulierten Kraftantworten mit bekannten Parametern modelliert. Die Methode der kleinsten Fehlerquadrate dient der Formulierung der Zielfunktion, deren Minimierung mit einem nichtlinearen Optimierungsverfahren erfolgen muss. Die Schwierigkeit besteht darin, tatsächlich das globale Minimum zu finden (also den Parametersatz, welcher das Versuchsergebnis am besten wiedergibt) und nicht in einem lokalen Minimum hängen zu bleiben. Die Verifikation der Identifikationsergebnisse soll erstens durch den Vergleich zwischen der gemessenen und der mit den identifizierten Parametern simulierten F - u -Kurve und zweitens durch den Vergleich der identifizierten Fließkurve mit Fließkurven aus dem Zugversuch erfolgen.

Identifikation probabilistischer Sprödbruchparameter

Die Ursache der Festigkeitsstreuung spröder Werkstoffe sind statistisch im Material verteilte Defekte. Auf der Weakest-Link-Theorie des Sprödbruchs von Weibull [Wei39] basieren verschiedene probabilistische Materialmodelle, welche die Versagenswahrscheinlichkeit mit einer zwei- oder dreiparametrigen Weibull-Verteilung beschreiben. Die Parameter werden als Materialparameter angesehen, die aus der Analyse einer möglichst großen Stichprobe bestimmt werden müssen. Für eine sinnvolle statistische Auswertung sind mindestens 20 Versuche unter nominell gleichen Versuchsbedingungen notwendig. In diesem Zusammenhang spricht man von Parameterschätzung, weil die Parameterwerte nur mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit angegeben werden können. Für Keramik existiert eine auf mehrachsige Spannungszustände erweiterte Weibull-Theorie, die sich für den inhomogenen zweiachsigen Spannungszustand in der Small-Punch-Probe eignet. Für den Sprödbruch der Stähle kann das BEREMIN-Modell oder eine seiner Modifikationen verwendet werden. Hier muss die gesamte Spannungsgeschichte im plastifizierten Probenvolumen ausgewertet werden, um die sogenannte Weibull-Spannung zu berechnen. Dies setzt die Kenntnis der temperaturabhängigen Fließkurven voraus. Für die Berechnung des effektiv beanspruchten Volumens von Keramikproben und der Weibull-Spannung von Stahlproben ist ein spezielles Postprocessing der FEM-Spannungsanalyse notwendig, um die in den Modellen auftretenden Integrale durch numerische Integration auszuwerten. Die Parameterschätzung kann bevorzugt mit der Maximum-Likelihood-Methode, aber alternativ auch mit der Median-Rank-Regression erfolgen. Die Übertragbarkeit der Weibull-Parameter soll anhand von Referenzversuchen überprüft werden.

Vorhersage der Sprödbruchzähigkeit

Der SPT soll auch hinsichtlich seiner Eignung für die Vorhersage der Sprödbruchzähigkeit K_{Ic} untersucht werden. Im Fall von Stahl soll dies auf Basis der FEM-Simulation einer Bruchmechanikprobe geschehen. Mit Hilfe der Fließkurvenparameter aus dem SPT kann die lastabhängige Weibull-Spannung und der funktionale Zusammenhang zwischen der Weibull-Spannung und dem Spannungsintensitätsfaktor berechnet werden. Die probabilistischen Sprödbruchparameter dienen dann der Vorhersage der Bruchzähigkeitsverteilung. Vielversprechend für die Bruchzähigkeitsvorhersage von Keramik ist eine Abwandlung der ISB-Methode¹ (*Indentation strength in bending*)[Die95] für den SPT. Dazu soll auf die Zugseite der SPT-Probe ein scharfer Anriss mittels Vickers-Indenter eingebracht und vermessen werden. Aus der Versagenslast kann mit Hilfe einer FEM-Analyse der derart modifizierten Probe der kritische Spannungsintensitätsfaktor vorhergesagt werden.

¹Bei der Methode wird mit Hilfe eines Indenters (Vickers oder Knoop) ein Anriss in eine 3- oder 4-Punkt-Biegeprobe eingebracht und diese anschließend bis zum Versagen belastet.

4 Theoretische Betrachtungen

4.1 Kontinuumsmechanische Grundlagen

Die plastischen Verformungen von Metallen gehen mit großen Deformationen und nichtlinearem Materialverhalten einher. Die phänomenologische Beschreibung des Materialverhaltens erfolgt mit tensoriellen Größen im Rahmen der Kontinuumsmechanik. Dabei wird der atomare oder mikrostrukturelle Aufbau eines Körpers vernachlässigt. Ein materieller Körper wird stattdessen als zusammenhängende Menge materieller Punkte betrachtet, die den Raum kontinuierlich ausfüllt und der stetige Eigenschaften zugeordnet werden. Die in der FEM verwendeten Modellgleichungen basieren auf kontinuumsmechanischen Größen. In diesem Abschnitt werden einige Grundlagen bereitgestellt, die zur Beschreibung des „wahren“ Verzerrungs- und Spannungszustandes bei großen Deformationen benötigt werden. Für eine ausführlichere und vollständige Darstellung der Kontinuumsmechanik sei auf die zahlreich vorhandene Literatur, insbesondere [Alt94, Hau00, Gre03, Wil03] verwiesen.

4.1.1 Konfiguration und Bewegung

Die Bewegung eines materiellen Körpers \mathcal{B} wird durch die Bewegung seiner Teilchen, den sogenannten materiellen Punkten, beschrieben. Zu jedem Zeitpunkt t muss einem beliebigen materiellen Punkt $P \in \mathcal{B}$ sein Ort im physikalischen Raum eindeutig zugeordnet werden. Den undeformierten Zustand zum Zeitpunkt $t = t_0$ bezeichnet man als Ausgangs- bzw. Referenzkonfiguration. Die Ausgangslage eines Punktes P wird durch den Ortsvektor $\mathbf{X} = X_I \mathbf{e}_I$ in einem kartesischen Referenzkoordinatensystem mit den Basisvektoren \mathbf{e}_I ($I = 1, 2, 3$) gekennzeichnet (Abb. 4.1). Die Koordinaten X_I werden materielle oder LAGRANGESche Koordinaten genannt. Sie markieren eindeutig jedes Teilchen und ändern sich während dessen Bewegung nicht. Die momentane Lage zu einem beliebigen späteren Zeitpunkt $t > t_0$ in der sogenannten Momentankonfiguration wird durch den Ortsvektor $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$ in einem relativ zum Referenzkoordinatensystem bewegten Koordinatensystem mit den Basisvektoren \mathbf{e}_i ($i = 1, 2, 3$) gekennzeichnet. Die Koordinaten x_i werden räumliche oder EULERSche Koordinaten genannt. Die Bewegung eines Körpers ist somit die zeitliche Abfolge der Momentankonfigurationen aller seiner materiellen Punkte. Die Funktion

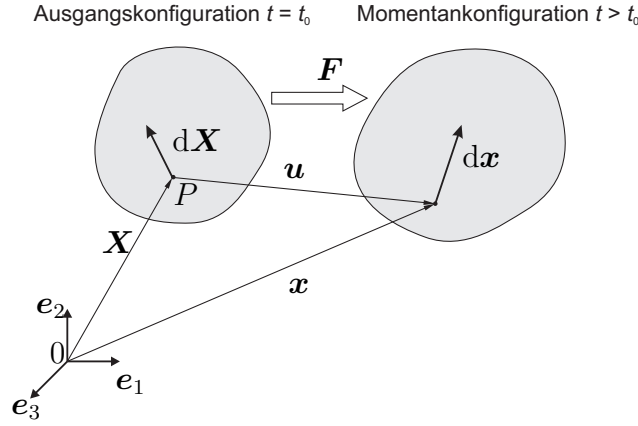


Abbildung 4.1: Bewegung eines materiellen Teilchens und Deformation eines materiellen Linienelementes bezüglich eines raumfesten Koordinatensystems

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad \text{bzw.} \quad x_i = x_i(X_I, t) \quad (4.1)$$

beschreibt die Bewegung des mit \mathbf{X} gekennzeichneten Teilchens P .

Feldgrößen (z.B. Verschiebungen, Verzerrungen, Spannungen) können in Abhängigkeit der materiellen Koordinaten (LAGRANGESche Betrachtungsweise) oder der räumlichen Koordinaten (EULERSche Betrachtungsweise) dargestellt werden. Es wird nun vereinbart, dass Koordinatenursprung und Basisvektoren in Ausgangs- und Momentankonfiguration wie in Abbildung 4.1 übereinstimmen. Während der Bewegung ändern sich demzufolge nur die momentanen Koordinaten der Teilchen, nicht jedoch die Basis. Dann gilt

$$\mathbf{e}_I \cdot \mathbf{e}_i = \delta_{Ii} = \begin{cases} 1 & I = i \\ 0 & I \neq i \end{cases} \quad (4.2)$$

mit dem KRONECKER-Symbol δ_{Ii} und auf die Unterscheidung zwischen großen und kleinen Indizes kann verzichtet werden. Um den Bezug auf die jeweilige Betrachtungsweise deutlich zu machen, wird jedoch die Unterscheidung zunächst beibehalten.

Der Verschiebungsvektor \mathbf{u} eines materiellen Punktes P ergibt sich aus der Differenz zwischen seiner momentanen Lage \mathbf{x} und seiner Ausgangslage \mathbf{X} . Obwohl sich LAGRANGESche und EULERSche Darstellung unterscheiden:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \quad \text{bzw.} \quad u_I(X_J, t) = \delta_{Ii} x_i(X_J, t) - X_I, \quad (4.3)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \quad \text{bzw.} \quad u_i(x_j, t) = x_i - \delta_{iI} X_I(x_j, t), \quad (4.4)$$

ist der Verschiebungsvektor in beiden Betrachtungsweisen identisch:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad \text{bzw.} \quad u_I(X_J, t) = u_i(x_j, t). \quad (4.5)$$

4.1.2 Materielle und räumliche Zeitableitung

Bei der zeitlichen Änderung einer beliebigen Feldgröße ψ wird unterschieden zwischen der materiellen Zeitableitung aus Sicht eines mit dem Teilchen \mathbf{X} mitbewegten Beobachters und der räumlichen Zeitableitung aus Sicht eines am Ort \mathbf{x} raumfesten Beobachters. Unter der materiellen Zeitableitung versteht man die partielle Zeitableitung

$$\dot{\psi} = \frac{D\psi(\mathbf{X},t)}{Dt} = \frac{\partial\psi(\mathbf{X},t)}{\partial t} \quad (4.6)$$

in LAGRANGEScher Darstellung. Unter der räumlichen oder lokalen Zeitableitung versteht man die partielle Zeitableitung in EULERScher Darstellung:

$$\frac{\partial\psi(\mathbf{x},t)}{\partial t}. \quad (4.7)$$

Die Geschwindigkeit \mathbf{v} eines Teilchens wird erhalten, indem die materielle Zeitableitung des Verschiebungsvektors bzw. des Ortsvektors gebildet wird:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} = \frac{\partial\mathbf{u}(\mathbf{X},t)}{\partial t} = \frac{\partial\mathbf{x}(\mathbf{X},t)}{\partial t} = \dot{\mathbf{x}}, \quad (4.8)$$

Den Zusammenhang zwischen materieller und räumlicher Zeitableitung erhält man, wenn die totale Zeitableitung der Feldgröße in EULERScher Darstellung gebildet wird:

$$\begin{aligned} \frac{D\psi(\mathbf{x}(\mathbf{X},t),t)}{Dt} &= \frac{\partial\psi(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \frac{\partial\psi(\mathbf{x},t)}{\partial\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial\mathbf{x}(\mathbf{X},t)}{\partial t} \\ \dot{\psi}(\mathbf{x}(\mathbf{X},t),t) &= \frac{\partial\psi(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \nabla\psi(\mathbf{x},t) \cdot \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Die materielle Zeitableitung in EULERScher Betrachtungsweise setzt sich also additiv aus der lokalen Zeitableitung und einem konvektiven Term zusammen.

4.1.3 Deformations- und Verzerrungsmaße

Die Verformung eines Körpers spiegelt sich in den relativen Verschiebungen seiner Materiateilchen wider. Bezeichnet $d\mathbf{X}$ ein differentiell kleines materielles Linienelement zwischen zwei benachbarten Punkten in der Ausgangskonfiguration, so wird dessen Transformation zu $d\mathbf{x}$ in der Momentankonfiguration mit Hilfe des Deformationsgradienten \mathbf{F} beschrieben:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \quad \text{bzw.} \quad dx_i = F_{iJ}dX_J. \quad (4.10)$$

Er ist ein Tensor 2. Stufe, der durch partielle Ableitung der Bewegungsgleichung (4.1) nach den materiellen Koordinaten erhalten wird und ist im Allgemeinen nicht symmetrisch:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} = F_{iJ} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_J \quad \text{mit} \quad F_{iJ} = \frac{\partial x_i}{\partial X_J} = x_{i,J}. \quad (4.11)$$

Die Umkehrung dieser Transformation beschreibt der inverse Deformationsgradient \mathbf{F}^{-1} :

$$d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x} \quad \text{bzw.} \quad dX_I = F_{Ij}^{-1} dx_j, \quad (4.12)$$

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \quad \text{bzw.} \quad F_{Ij}^{-1} = \frac{\partial X_I}{\partial x_j} = X_{I,j}. \quad (4.13)$$

Damit \mathbf{F}^{-1} existiert, darf die Determinante von \mathbf{F} nicht Null werden:

$$\det(\mathbf{F}) = \det[F_{iJ}] \neq 0. \quad (4.14)$$

Der Deformationsgradient beschreibt sowohl Längenänderungen als auch Rotationen eines Linienelementes, enthält aber keine Starrkörperverschiebung. Er liefert auch den Zusammenhang zwischen Flächenelementen bzw. Volumenelementen in der Ausgangskonfiguration ($d\mathbf{A}_0$ bzw. dV_0) und der Momentankonfiguration ($d\mathbf{A}$ bzw. dV):

$$d\mathbf{A} = \det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T} \cdot d\mathbf{A}_0, \quad (4.15)$$

$$dV = \det(\mathbf{F}) dV_0. \quad (4.16)$$

\mathbf{F} kann auch mit dem materiellen Verschiebungsgradienten sowie \mathbf{F}^{-1} mit dem räumlichen Verschiebungsgradienten und dem Einheitstensor \mathbf{I} ausgedrückt werden:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial(\mathbf{X} + \mathbf{u})}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \quad \text{bzw.} \quad F_{iJ} = \frac{\partial(\delta_{iK} X_K + u_i)}{\partial X_J} = \delta_{iJ} + u_{i,J}, \quad (4.17)$$

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial(\mathbf{x} - \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{I} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \quad \text{bzw.} \quad F_{Ij}^{-1} = \frac{\partial(\delta_{Ik} x_k - u_I)}{\partial x_j} = \delta_{Ij} - u_{I,j}. \quad (4.18)$$

Weil der Deformationsgradient außer Längenänderungen auch Starrkörperdrehungen enthält, ist er ungeeignet für die Beschreibung von Verzerrungen. Mit Hilfe der polaren Zerlegung

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \quad (4.19)$$

können jedoch die Drehanteile abgespalten werden. Dabei bezeichnet $\mathbf{R} = R_{kL} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_L$ einen eigentlich orthogonalen ($\det \mathbf{R} = 1$, $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$) Drehtensor, $\mathbf{U} = U_{MN} \mathbf{e}_M \otimes \mathbf{e}_N$ den rechten Strecktensor bezüglich der Ausgangskonfiguration und $\mathbf{V} = V_{mn} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n$ den linken Strecktensor bezüglich der Momentankonfiguration. Beide Strecktensoren sind symmetrisch und positiv definit. \mathbf{F} beschreibt also die Abfolge entweder einer Drehung \mathbf{R} mit anschließender Streckung \mathbf{V} oder einer Streckung \mathbf{U} mit nachfolgender Drehung \mathbf{R} .

Der Deformationsgradient kann aufgrund $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$ zur Definition von rotationsfreien Deformationsmaßen

$$\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{U} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^T \quad (4.20)$$

verwendet werden, die wie \mathbf{F} im unverformten Zustand mit dem Einheitstensor \mathbf{I} identisch sind. Für die Formulierung konstitutiver Gleichungen sind jedoch Verzerrungsmaße sinnvoll, die in der Ausgangskonfiguration und bei reiner Starrkörperbewegung den Wert Null annehmen. Bildet man die Differenz der Quadrate materieller Linienelemente in Momentan- und Ausgangskonfiguration,

$$d\mathbf{x}^T \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X}^T \cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{X}^T \cdot (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) \cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{x}^T \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1}) \cdot d\mathbf{x}, \quad (4.21)$$

so lassen sich der GREEN-LAGRANGESche Verzerrungstensor \mathbf{E} bezüglich der Ausgangskonfiguration und der EULER - ALMANSische Verzerrungstensor \mathbf{e} bezüglich der Momentankonfiguration definieren, die beide im unverzerrten Zustand den Wert Null annehmen:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}), \quad (4.22)$$

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1}). \quad (4.23)$$

Beide Verzerrungstensoren sind symmetrisch und lassen sich mit Hilfe des Deformationsgradienten ineinander umrechnen:

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{F} \quad \text{oder} \quad \mathbf{e} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}^{-1}. \quad (4.24)$$

Unter Verwendung von Beziehung (4.17) und (4.18) können sie auch durch den Verschiebungsgradienten ausgedrückt werden. Sie lauten dann in Koordinatenschreibweise:

$$E_{KL} = \frac{1}{2} (u_{K,L} + u_{L,K} + u_{M,K} u_{M,L}) \quad (4.25)$$

$$e_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k} - u_{m,k} u_{m,l}). \quad (4.26)$$

Bei kleinen Deformationen (Verschiebungsgradient $\ll 1$) dürfen sowohl die quadratischen Terme als auch der Unterschied zwischen den materiellen und den räumlichen Koordinaten vernachlässigt werden ($u_{K,L} \approx u_{k,l}$). Die finiten Verzerrungstensoren \mathbf{E} und \mathbf{e} gehen dann in den linearisierten infinitesimalen Verzerrungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ über:

$$\mathbf{E} \approx \mathbf{e} \approx \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right) \quad \text{bzw.} \quad E_{ij} \approx e_{ij} \approx \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (4.27)$$

Besitzen die Verzerrungstensoren positive Eigenwerte, so bedeutet dies eine Vergrößerung des Volumens, negative Eigenwerte bedeuten dagegen die Stauchung des Volumens. Mit der Transformationsbeziehung für Volumenelemente (4.16) gilt für die Volumendehnung:

$$\varepsilon_V = \frac{dV - dV_0}{dV_0} = \det(\mathbf{F}) - 1. \quad (4.28)$$

Wenn infolge plastischen Verformungen große Deformationen auftreten, ist es zweckmäßig noch ein anderes Dehnungsmaß zu verwenden, die logarithmische oder HENCKY-Dehnung:

$$\varepsilon^H = \int_{l_0}^l \frac{d\bar{l}}{\bar{l}} = \ln \frac{l}{l_0} = \ln(1 + \varepsilon^t). \quad (4.29)$$

Sie beschreibt die „wahre Dehnung“ im einachsigen Zugversuch bei großen Längenänderungen. l_0 bezeichnet die Ausgangslänge, l die augenblickliche Länge und ε^t die technische Dehnung ($\varepsilon^t = (l - l_0)/l_0$). Ein wesentlicher Vorteil der HENCKY-Dehnung ist die Summierbarkeit von Teildehnungen. Wenn man die Verlängerung eines Stabes der Ausgangslänge l_0 auf die Länge l_1 und die anschließende Verlängerung auf die Endlänge l_2 betrachtet, so gilt:

$$\varepsilon_{(l_0 \rightarrow l_2)}^H = \varepsilon_{(l_0 \rightarrow l_1)}^H + \varepsilon_{(l_1 \rightarrow l_2)}^H = \ln \frac{l_1}{l_0} + \ln \frac{l_2}{l_1} = \ln \frac{l_2}{l_0}. \quad (4.30)$$

Der Zusammenhang mit den zuvor definierten Verzerrungsmaßen soll am Beispiel des einachsigen Zugstabes verdeutlicht werden. Ein materielles Linienelement $d\mathbf{X} = dX_1 \mathbf{e}_1$ sei in Richtung der Stabachse orientiert und werde in die Momentankonfiguration $d\mathbf{x} = dx_1 \mathbf{e}_1$ gestreckt. Die Deformation wird in diesem Fall beschrieben durch

$$dx_1 = \frac{l}{l_0} dX_1 = F_{11} dX_1 = U_{11} dX_1 = \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right) dX_1. \quad (4.31)$$

Zwischen der HENCKY-Dehnung und den anderen Deformationsmaßen besteht demzufolge der Zusammenhang

$$\varepsilon^H = \ln \frac{l}{l_0} = \ln F_{11} = \ln U_{11} = \ln\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right) = \ln \sqrt{2E_{11} + 1}. \quad (4.32)$$

Die Verallgemeinerung auf mehrachsige Verzerrungszustände führt auf den HENCKYschen Verzerrungstensor in LAGRANGEScher bzw. EULERScher Darstellung (siehe [Wil03], [Alt94]):

$$\mathbf{H} = \ln \mathbf{U} = \frac{1}{2} \ln(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}) = \frac{1}{2} \ln(\mathbf{I} + 2\mathbf{E}) \quad (4.33)$$

$$\mathbf{h} = \ln \mathbf{V} = \frac{1}{2} \ln(\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T) = -\frac{1}{2} \ln(\mathbf{I} - 2\mathbf{e}). \quad (4.34)$$

Die Beschreibung inelastischer Deformationen erfolgt üblicherweise in Ratenformulie-

rung. Dafür wird der räumliche Geschwindigkeitsgradient \mathbf{l} benötigt:

$$\mathbf{l} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \quad \text{bzw.} \quad l_{ij} = v_{i,j}. \quad (4.35)$$

Mit Hilfe des zweistufigen Tensors \mathbf{l} kann die zeitliche Änderung eines materiellen Linienelement $d\mathbf{x}$ in der Momentankonfiguration berechnet werden:

$$(d\mathbf{x})' = d\mathbf{v} = \mathbf{l} \cdot d\mathbf{x} \quad \text{bzw.} \quad (dx_i)' = dv_i = l_{ij} dx_j. \quad (4.36)$$

Er kann in den symmetrischen Deformationsgeschwindigkeitstensor \mathbf{d} und den antimetrischen Drehgeschwindigkeitstensor \mathbf{w} zerlegt werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{l} = \mathbf{d} + \mathbf{w} &= \frac{1}{2}(\mathbf{l} + \mathbf{l}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{l} - \mathbf{l}^T) \quad \text{bzw.} \\ l_{ij} = d_{ij} + w_{ij} &= \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) + \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}) \end{aligned} \quad (4.37)$$

\mathbf{d} beschreibt die Geschwindigkeit der Längen- und Winkeländerung materieller Linienelemente und \mathbf{w} deren Starrkörperrotationsgeschwindigkeiten. Der materielle Geschwindigkeitsgradient ist identisch mit der materiellen Zeitableitung des Deformationsgradienten $\dot{\mathbf{F}}$ und stimmt mit der materiellen Zeitableitung des Verschiebungsgradienten überein:

$$\dot{\mathbf{F}} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \right) = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \right) \quad \text{bzw.} \quad \dot{F}_{iJ} = v_{i,J} = (u_{i,J})'. \quad (4.38)$$

Zwischen materiellem und räumlichem Geschwindigkeitsgradient gelten die Beziehungen

$$\dot{\mathbf{F}} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{l} \cdot \mathbf{F} \quad \text{bzw.} \quad \dot{F}_{iJ} = v_{i,k} x_{k,J} = l_{ik} F_{kJ}, \quad (4.39)$$

$$\mathbf{l} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad \text{bzw.} \quad l_{ij} = v_{i,K} X_{K,j} = \dot{F}_{iK} F_{Kj}^{-1}. \quad (4.40)$$

Die materiellen Zeitableitungen des GREEN-LAGRANGESchen und des EULERALMANSischen Verzerrungstensors lauten in Koordinatenschreibweise:

$$\dot{E}_{KL} = \frac{1}{2} (v_{K,L} + v_{L,K} + v_{M,K} u_{M,L} + u_{M,K} v_{M,L}), \quad (4.41)$$

$$\dot{e}_{kl} = \frac{1}{2} (v_{k,l} + v_{l,k}) - v_{m,k} e_{ml} - e_{mk} v_{m,l}. \quad (4.42)$$

Für kleine Verzerrungen gilt analog zu Gl. (4.27) die Linearisierung

$$\dot{E}_{ij} \approx \dot{e}_{ij} \approx \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}) = d_{ij}. \quad (4.43)$$

4.1.4 Spannungen

Wirken auf einen Körper äußere Lasten ein, so entstehen im Inneren Kräfte, welche an einem gedanklichen Schnitt durch den Körper als Schnittspannungsvektoren wirken. Der in der Momentankonfiguration auf die differentiell kleine Schnittfläche dA mit dem Normalenvektor \mathbf{n} bezogene Schnittkraftvektor $d\mathbf{s}$ ist als CAUCHYscher Schnittspannungsvektor

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{s}}{dA} \quad (4.44)$$

definiert. Die lineare Abbildung zwischen der Schnittflächennormalen \mathbf{n} und dem Schnittspannungsvektor $\mathbf{t}(\mathbf{n})$ wird durch den CAUCHYschen Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ beschrieben:

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \quad \text{bzw.} \quad t_i = \sigma_{ij} n_j. \quad (4.45)$$

Er ist ein zweistufiger symmetrischer¹ Tensor und charakterisiert den wahren Spannungszustand eines materiellen Punktes aus Sicht der Momentankonfiguration. Auf der Hauptdiagonale $i = j$ befinden sich die drei Normalspannungskomponenten σ_{11} , σ_{22} und σ_{33} . Die Spannungskomponenten mit $i \neq j$ sind die sechs Schubspannungen σ_{12} , σ_{23} , σ_{31} , σ_{21} , σ_{32} und σ_{13} . Treten in drei senkrecht aufeinander stehenden Schnitten nur Normal- und keine Schubspannungen auf, so wird das entsprechend gedrehte Bezugssystem mit den Koordinatenachsen in Richtung der Schnittflächennormalen Hauptachsensystem genannt. Die Normalspannungen werden dann als Hauptspannungen σ_1 , σ_2 und σ_3 bezeichnet, wobei $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ vereinbart wird. Mit der CAUCHYschen Spannungsformel (4.45) lässt sich für eine beliebig orientierte Schnittfläche der Schnittspannungsvektor aus dem Spannungstensor und dem Normaleneinheitsvektor berechnen. Deshalb muss in einem Punkt auf der Oberfläche des Körpers $\mathbf{x} \in \partial V$ mit dem nach außen gerichteten Normalenvektor $\bar{\mathbf{n}}$ und dem Randspannungsvektor $\bar{\mathbf{t}}$ der Spannungstensor so beschaffen sein, dass $\bar{\mathbf{t}} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \bar{\mathbf{n}}$ gilt.

Bezieht man die Schnittkraft auf die Fläche dA_0 mit dem Normalenvektor \mathbf{N} in der Ausgangskonfiguration, so erhält man den Nennspannungsvektor

$$\mathbf{p} = \frac{d\mathbf{s}}{dA_0}. \quad (4.46)$$

Analog zu (4.45) kann der 1. PIOLA-KIRCHHOFFsche Spannungstensor

$$\mathbf{p}(\mathbf{N}) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{N} \quad \text{bzw.} \quad p_i = P_{iJ} N_J. \quad (4.47)$$

definiert werden. Er ist nicht symmetrisch, seine Elemente beschreiben die sogenannten technischen oder Nennspannungen. Die beiden Spannungstensoren lassen sich mit Hilfe

¹Die Symmetrie $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$ lässt sich anhand des Momentengleichgewichts am Volumenelement zeigen.

des Deformationsgradienten ineinander überführen:

$$\mathbf{P} = \det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad \text{bzw.} \quad P_{Kj} = \det(F_{Mn}) F_{Ki}^{-1} \sigma_{ij}. \quad (4.48)$$

Um die Art des Spannungszustandes zu charakterisieren, ist es nützlich $\boldsymbol{\sigma}$ additiv in einen hydrostatischen (Kugeltensor) und einen deviatorischen Anteil zu zerlegen:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^K + \sigma_{ij}^D \quad (4.49)$$

$$\text{mit Kugeltensor} \quad \sigma_{ij}^K = \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad \text{und Deviator} \quad \sigma_{ij}^D = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^K. \quad (4.50)$$

Während der hydrostatische Anteil σ_{ij}^K allseitig gleichen Zug oder Druck beschreibt, ist der Spannungsdeviator σ_{ij}^D die Ursache für Gestaltänderungen.

4.2 Konstitutive Materialgleichungen

Die Beschreibung des mechanischen Materialverhaltens erfolgt mit den sogenannten konstitutiven Gleichungen. Sie bilden phänomenologisch den Zusammenhang zwischen den lokalen Spannungen und Verzerrungen mit einem mathematischen Modell ab. Ein solches Modell enthält materialabhängige Parameter, die es mit Hilfe von geeigneten Experimenten zu bestimmen gilt. In dieser Arbeit interessiert das Materialverhalten von Keramik und Stahl im SPT. Während der Keramikwerkstoff bis zum Versagen elastisch bleibt, verhalten sich die Stähle nur zu Beginn ihrer Belastungsgeschichte elastisch. Oberhalb einer charakteristischen Belastungshöhe (Elastizitätsgrenze, Streckgrenze) setzt plastisches Fließen und Materialverfestigung ein. Duktile Schädigungsprozesse werden nicht betrachtet, weil der Fokus dieser Arbeit darauf gelegt wurde, das spröde Materialverhalten mit dem SPT zu charakterisieren. Weiterhin wird Materialisotropie angenommen, was bei polykristallinen Werkstoffen eine geeignete Näherung darstellt. Bevor konstitutive Materialparameter identifiziert werden können, müssen sie zunächst durch die kontinuumsmechanische Formulierung der Materialgleichungen als solche definiert werden.

4.2.1 Linearelastisches Material

Elastisches Materialverhalten ist dadurch gekennzeichnet, dass ein Körper bei Entlastung wieder in seine Ausgangsform zurückgeht, Verformungen also reversibel sind. Außerdem verhält sich das Material unabhängig von der Zeit, der Belastungsgeschichte und Belastungsgeschwindigkeit. Es besteht demzufolge ein eindeutiger Zusammenhang zwischen den momentanen Spannungen und Verzerrungen. Die allgemeinste Form der Elastizität

bei großen Deformationen und Nichtlinearität wird als Hyperelastizität bezeichnet. Da bei den untersuchten Werkstoffen nur kleine elastische Deformationen auftreten, kann das Materialverhalten mit Hilfe eines linearen Elastizitätsgesetzes beschrieben werden. Die Verknüpfung der wahren Spannungen σ_{ij} mit den kleinen elastischen Verzerrungen ε_{ij}^{el} erfolgt über den 4-stufigen Elastizitätstensor C_{ijkl} . Die lineare Abbildung

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{el} \quad (4.51)$$

wird verallgemeinertes HOOKE'sche Gesetz genannt. Es beschreibt den allgemeinsten Fall der elastischen Anisotropie. Multikristalline Werkstoffe können allerdings auf Makroebene, d.h. über mehrere Körner des Gefüges gemittelt, als elastisch isotrop angesehen werden. Im isotropen Fall vereinfacht sich das HOOKE'sche Elastizitätsgesetz zu

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij}^{el} + \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk}^{el} \quad (4.52)$$

mit den zwei LAMESchen Konstanten μ und λ . In der Praxis erweist sich jedoch eine andere Schreibweise mit den beiden Ingenieurkonstanten Elastizitätsmodul E und Querkontraktionszahl (Poisson-Zahl) ν als günstiger. Das isotrope HOOKEsche Gesetz lautet dann

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ij}^{el} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk}^{el} \delta_{ij} \right), \quad (4.53)$$

wobei folgender Zusammenhang zwischen den Konstanten besteht:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \quad (4.54)$$

Für gebräuchliche Konstruktionswerkstoffe sind die elastischen Konstanten meist bekannt und müssen nicht extra mit dem SPT bestimmt werden. Anders sieht die Situation bei neuen oder seltenen Werkstoffen aus oder wenn Proben aus Bauteilen entnommen wurden, für die keine Materialdaten verfügbar sind. Obwohl der SPT nicht für die Charakterisierung des elastischen Materialverhaltens entwickelt wurde, ist es naheliegend sein Potential für diesen Zweck auszuloten. Thermische Dehnungen spielen bei den durchzuführenden SPT-Experimenten bei tiefen Temperaturen keine Rolle. Sie wirken sich nicht auf den Spannungszustand aus, weil die Proben beim Abkühlen keine kinematischen Behinderungen erfahren und die Versuche bei konstanter Temperatur durchgeführt werden.

4.2.2 Elastisch-Plastisches Material mit isotroper Verfestigung

Bei Stählen und anderen metallischen Werkstoffen treten unterhalb einer materialspezifischen Belastungsgrenze, die als Fließgrenze σ_F bezeichnet wird, nur elastische Verformun-

gen auf. Übersteigt die lokale Beanspruchung in einem Materialpunkt die Fließgrenze, beginnt das Material sich bleibend zu verformen, man spricht vom plastischen Fließen. Nach der Entlastung bleiben plastische Verformungen zurück, die irreversibel sind. In realen Metallen erhöht sich als Folge der plastischen Deformationen die Fließgrenze, man spricht von Verfestigung. Die reversiblen Verformungen können in guter Näherung als linearelastisch betrachtet werden. Für die Formulierung eines plastischen Werkstoffgesetzes benötigt man eine Fließbedingung, eine Fließregel und ein Verfestigungsgesetz. Im Folgenden werden die erforderlichen Beziehungen der inkrementellen Plastizitätstheorie für den allgemeinen dreiachsigen Spannungszustand dargelegt (siehe dazu auch [Kre92, Bur92]). Es wird sich auf isotrope Verfestigung beschränkt, denn im Small-Punch-Test kann die kinematische Verfestigung nicht untersucht werden, weil keine Entlastung mit anschließender Belastungsumkehr erfolgt. Die mathematisch einfacher zu handhabende sogenannte Deformationstheorie der Plastizität (HENCKY [Hen24]), die eigentlich ein mit finiten Verzerrungen formuliertes nichtlineares hyperelastisches Materialgesetz für streng monoton steigende Belastung ist, kann im Fall des SPT ebenfalls nicht angewandt werden, weil im Experiment Spannungsumlagerungen und Teilentlastungen in der Probe auftreten.

Beschreibung der Verzerrungen

Solange die auftretenden Deformationen klein bleiben, können die Verzerrungen additiv in einen elastischen und einen plastischen Anteil zerlegt werden:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{\text{el}} + \varepsilon_{ij}^{\text{pl}}. \quad (4.55)$$

Bei großen Deformationen ist zum einen diese Zerlegung nicht mehr gültig, zum anderen ist der infinitesimale Verzerrungstensor dann ein ungeeignetes Verzerrungsmaß. Um große elastisch-plastische Deformationen richtig beschreiben zu können, schlug LEE [Lee69] eine multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{\text{el}} \cdot \mathbf{F}^{\text{pl}} \quad (4.56)$$

vor. \mathbf{F}^{pl} beschreibt die Deformation in eine spannungsfreie plastische Zwischenkonfiguration, die durch eine fiktive elastische Entlastung $(\mathbf{F}^{\text{el}})^{-1}$ der Momentankonfiguration entsteht. Unter der Voraussetzung plastischer Inkompressibilität führen nur die elastischen Verzerrungen zu einer Volumendehnung, demzufolge gilt mit Gleichung (4.28)

$$\varepsilon_V = \det(\mathbf{F}^{\text{el}} \cdot \mathbf{F}^{\text{pl}}) - 1 = \det(\mathbf{F}^{\text{el}}) - 1 = \varepsilon_V^{\text{el}}, \quad \det(\mathbf{F}^{\text{pl}}) = 1 \quad (4.57)$$

In der ingenieurtechnischen Praxis werden jedoch elastisch-plastische Deformationen

metallischer Werkstoffe bevorzugt in inkrementeller Form oder Ratenform formuliert. Das infinitesimale Dehnungsinkrement bzw. die infinitesimale Dehnrates wird additiv in einen elastischen und einen plastischen Anteil zerlegt:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^{\text{el}} + d\varepsilon_{ij}^{\text{pl}} \quad \text{bzw.} \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{el}} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{pl}}. \quad (4.58)$$

Aufgrund der Identität $\dot{\varepsilon}_{ij} = d_{ij}$ in Gl. (4.43) gilt auch für den Deformationsgeschwindigkeitstensor:

$$d_{ij} = d_{ij}^{\text{el}} + d_{ij}^{\text{pl}}. \quad (4.59)$$

Obwohl die additive Zerlegung nur für infinitesimale Verzerrungen exakt richtig ist, darf sie auch bei großen finiten Verzerrungen näherungsweise verwendet werden, solange der elastische Verzerrungsanteil klein bleibt. Diese Annahme ist für die untersuchten Stahlwerkstoffe erfüllt. Das HOOKE'sche Gesetz behält für den elastischen Anteil der Deformationen weiterhin seine Gültigkeit. Es lautet in Ratenform

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}^{\text{el}} = C_{ijkl} (\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^{\text{pl}}). \quad (4.60)$$

Für metallische Werkstoffe ist experimentell erwiesen, dass plastische Verformungen keine Volumenänderung bewirken, sondern ausschließlich gestaltändernden Charakter haben [Bur92],[Kre92]. Demzufolge verschwindet der hydrostatische Anteil der plastischen Verzerrungen, sie werden allein durch ihren deviatorischen Anteil beschrieben. Der hydrostatische Anteil der Dehnrates, der mit Dichteänderungen einhergeht, kann allein den elastischen Verzerrungen zugeordnet werden. Es gelten folgende Beziehungen:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{plK}} = \dot{\varepsilon}_{kk}^{\text{pl}} = 0, \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{pl}} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{plD}}, \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{K}} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{elK}}, \quad (4.61)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{elK}} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{plD}} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{plD}}. \quad (4.62)$$

Fließfunktion

Um zu entscheiden, ob ein Materialteilchen nur elastisch oder auch plastisch verformt wird, bedient man sich der skalarwertigen Fließfunktion f in Abhängigkeit des Spannungszustandes und innerer Verfestigungsvariablen h_α . Betrachtet man den Spannungszustand als Punkt im Raum der 6 Komponenten des CAUCHYschen Spannungstensors σ_{ij} , so bilden alle an der Elastizitätsgrenze liegenden Punkte eine Hyperfläche, die Fließfläche genannt wird. Man kann sie sich als Oberfläche eines Körpers im Spannungsraum vorstellen, die mathematisch durch die Fließbedingung [Kre92]

$$f(\sigma_{ij}, h_\alpha) = 0 \quad (4.63)$$

beschrieben wird. Alle Punkte im Inneren des Körpers mit $f(\sigma_{ij}, h_\alpha) < 0$ bezeichnen elastische Spannungszustände. Beim Auftreten plastischer Verzerrungen liegt der Spannungspunkt immer auf der Fließfläche. Spannungszustände außerhalb des Fließkörpers mit $f(\sigma_{ij}, h_\alpha) > 0$ sind nicht möglich, jedoch kann sich infolge der Verfestigung die Form der Fließfläche und damit auch die Fließbedingung ändern, sodass weiterhin Gl. (4.63) gilt. Die inneren Variablen h_α können skalare oder tensorielle Größen sein, welche zur Beschreibung der Form und Größe der Fließfläche sowie ihrer Lage im Spannungsraum dienen. Sie beschreiben also den aktuellen Zustand der Verfestigung und erfassen somit die Belastungsgeschichte der Werkstoffe. Die zeitliche Änderung der Fließfunktion bei plastischen Deformationen wird durch die Konsistenzbedingung

$$\dot{f}(\sigma_{ij}, h_\alpha) = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial h_\alpha} \dot{h}_\alpha = 0 \quad (4.64)$$

beschrieben. Sie besagt, dass die Fließfunktion trotz Änderung des Spannungszustandes und der Verfestigung immer den Wert Null beibehalten muss.

Für die Formulierung der Fließbedingung existieren verschiedene Ansätze. Hier wird nur auf die bewährte Fließbedingung nach v. MISES für metallische Werkstoffe eingegangen, die in praktisch allen kommerziellen FE-Programmen verwendet wird. Um mehrachsige Spannungszustände auf einen einachsigen Vergleichszustand zurückzuführen, wird zunächst eine skalarwertige Vergleichsspannung σ_V definiert. Sie lautet im Raum der Komponenten des Spannungstensors bzw. im Hauptspannungsraum

$$\sigma_V(\sigma_{ij}) = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)}, \quad (4.65)$$

$$\sigma_V(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}. \quad (4.66)$$

Die Fließbedingung wird dann meist in der quadratischen Form

$$f(\sigma_V, h_\alpha) = \sigma_V^2 - \sigma_F^2(h_\alpha) = 0 \quad (4.67)$$

geschrieben. Im Hauptspannungsraum ist die Fließfläche ein unendlich langer Kreiszylinder, dessen Achse mit der Raumdiagonale (hydrostatische Achse) zusammenfällt. Weil in jeder Deviatorebene (Ebene senkrecht zur hydrostatischen Achse) die Fließfläche einen Kreis mit dem Radius $\sqrt{2/3} \sigma_F$ beschreibt, also alle Punkte der Fließfläche den gleichen Abstand zur hydrostatischen Achse haben, ist die Fließbedingung nach v. MISES unabhängig vom hydrostatischen Spannungsanteil. σ_V kann allein durch den Spannungsdeviator ausgedrückt werden. Weil die erste Invariante des Spannungsdeviators verschwindet

($I(\sigma_{ij}^D) = \sigma_{kk}^D = 0$), hängt die Vergleichsspannung nach v. MISES nur von der zweiten Invariante des Spannungsdeviators $II(\sigma_{ij}^D)$ ab:

$$\sigma_V(\sigma_{ij}^D) = \sqrt{\frac{3}{2}\sigma_{ij}^D\sigma_{ij}^D} = \sqrt{-3II(\sigma^D)}. \quad (4.68)$$

Die Fließbedingung lautet dann:²

$$f_{\text{Mises}} = \frac{3}{2}\sigma_{ij}^D\sigma_{ij}^D - \sigma_F^2 = 0. \quad (4.69)$$

Fließregel

Die Fließregel dient der Beschreibung der Evolution der plastischen Verzerrungen nach Betrag und Richtung. Gesucht sind also die Komponenten des plastischen Verzerrungsincrementes $d\varepsilon_{ij}^{\text{pl}}$. Bei stabilem Materialverhalten (monoton wachsende Spannungs-Dehnungs-Kurve) muss das Stabilitätspostulat von DRUCKER erfüllt sein [Kre92]:

$$d\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}^{\text{pl}} \geq 0 \quad \text{bzw.} \quad \dot{\sigma}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{pl}} \geq 0. \quad (4.70)$$

Es besagt, dass die Arbeit zur Verfestigung des Materials nicht negativ sein darf. Damit für alle möglichen Spannungsincremente $d\sigma_{ij}$ die Forderung (4.70) eingehalten werden kann, muss die Fließfläche konvex sein und das plastische Dehnungsincrement $d\varepsilon_{ij}^{\text{pl}}$ die Richtung des Normalenvektors auf der Fließfläche $f = 0$ annehmen. Die assoziierte Fließregel

$$d\varepsilon_{ij}^{\text{pl}} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad \text{bzw.} \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{pl}} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (4.71)$$

wird deshalb auch Normalenregel genannt. Während der Gradient der Fließfläche $\partial f / \partial \sigma_{ij}$ die Richtung des plastischen Dehnungsincrementes bestimmt, legt der skalare Faktor $d\lambda$ den Betrag fest. Der sogenannte plastische Multiplikator $\dot{\lambda}$ kann keine negativen Werte annehmen. Für ihn kann folgende Fallunterscheidung getroffen werden:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &> 0 \quad \forall \quad f = 0 \wedge \dot{f} = 0 \quad (\text{plastisches Fließen}) \\ \dot{\lambda} &= 0 \quad \forall \quad f \leq 0 \wedge \dot{f} < 0 \quad (\text{elastischer Bereich bzw. Entlastung}) \end{aligned} \quad (4.72)$$

Mit der Fließbedingung (4.69) und

$$\frac{\partial f_{\text{Mises}}}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f_{\text{Mises}}}{\partial \sigma_{kl}^D} \frac{\partial \sigma_{kl}^D}{\partial \sigma_{ij}} = 3\sigma_{kl}^D(\delta_{ki}\delta_{lj} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}) = 3\sigma_{ij}^D - \sigma_{kk}^D\delta_{ij} = 3\sigma_{ij}^D \quad (4.73)$$

²Aus dem Theoriehandbuch von ABAQUS [DSS09] geht hervor, dass eine Fließfunktion der Form

$f_{\text{Mises}} = \sqrt{\frac{3}{2}\sigma_{ij}^D\sigma_{ij}^D} - \sigma_F = 0$ verwendet wird, die schließlich auf $\dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{pl}} = \frac{3}{2} \frac{\sigma_{ij}^D}{\sigma_V} \dot{\lambda}$ und $\dot{\varepsilon}_V^{\text{pl}} = \dot{\lambda}$ führt.

lautet die assoziierte Fließregel bei Isotropie

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{pl}} = 3\dot{\lambda}\sigma_{ij}^{\text{D}}. \quad (4.74)$$

Die plastische Verzerrungsrate verhält sich proportional zum Spannungsdeviator. Die Evolution der plastischen Verzerrungen ist jedoch nicht nur vom aktuellen Spannungszustand, sondern auch von der in der Belastungsgeschichte erreichten Verfestigung abhängig.

Verfestigungsgesetz

Im Allgemeinen wird bei Stählen und anderen metallischen Werkstoffen zwischen isotroper, kinematischer und kombinierter Verfestigung unterschieden. Die isotrope Verfestigung führt zu einer gleichförmigen Vergrößerung der Fließfläche, die kinematische Verfestigung zu einer Verschiebung derselben, die kombinierte Verfestigung verbindet beide Effekte, was dem realen Materialverhalten vieler Metalle am nächsten kommt. Aufgrund der monoton steigenden Belastung im SPT (keine Lastumkehr) ist es mit diesem Versuch nicht möglich zwischen isotroper und kinematischer Verfestigung zu unterscheiden. Solange jedoch auch in einem Bauteil keine Lastumkehr zwischen Zug- und Druckspannungen erfolgt, reicht es aus, den Werkstoff als isotrop verfestigend zu betrachten. Dann kann die Expansion der Fließfläche, durch eine einzige skalare Verfestigungsvariable $h_1 = R$ beschrieben werden, die zur Anfangsfließspannung σ_{F0} addiert wird. Als innere Zustandsvariable, welche die Verfestigungsentwicklung beschreibt, wird die akkumulierte plastische Vergleichsdehnung $\varepsilon_{\text{V}}^{\text{pl}}$ verwendet. Sie erhält man durch Integration des plastischen Anteils des Verzerrungsgeschwindigkeitstensors $\dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{pl}}$,

$$\varepsilon_{\text{V}}^{\text{pl}} = \int_0^t \dot{\varepsilon}_{\text{V}}^{\text{pl}} dt, \quad \dot{\varepsilon}_{\text{V}}^{\text{pl}} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{pl}} \dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{pl}}}. \quad (4.75)$$

Aufgrund der plastischen Inkompressibilität beschreibt $\dot{\varepsilon}_{\text{V}}^{\text{pl}}$ allein die Größe der plastischen Gestaltänderungsgeschwindigkeit, die äquivalent zur plastischen Dehnungsgeschwindigkeit im einachsigen Zugversuch ($\dot{\varepsilon}_{11}^{\text{pl}} = \dot{\varepsilon}^{\text{pl}}$, $\dot{\varepsilon}_{22}^{\text{pl}} = \dot{\varepsilon}_{33}^{\text{pl}} = -0,5\dot{\varepsilon}^{\text{pl}}$) ist. Aus der Äquivalenz der plastischen Dissipationsleistung im allgemeinen mehrachsigen Beanspruchungsfall und im einachsigen Vergleichsfall

$$\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{pl}} = \sigma_{ij}^{\text{D}} \dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{pl}} = \sigma_{\text{V}} \dot{\varepsilon}_{\text{V}}^{\text{pl}} \quad (4.76)$$

folgt mit (4.68) und (4.74) für die plastische Verzerrungsrate und den plastischen Multiplikator:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{pl}} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\varepsilon}_{\text{V}}^{\text{pl}}}{\sigma_{\text{V}}} \sigma_{ij}^{\text{D}}, \quad (4.77)$$

$$\dot{\lambda} = \frac{\dot{\varepsilon}_V^{\text{pl}}}{2\sigma_V}. \quad (4.78)$$

Die Beziehungen gelten streng genommen nur für kleine Deformationen. Durch eine sogenannte updated-LAGRANGESche Betrachtungsweise wird der Gültigkeitsbereich auch auf große plastische Deformationen erweitert. Die Momentankonfiguration im aktuellen Lastschritt wird zur Referenzkonfiguration im nächsten Lastschritt. Innerhalb eines kleinen Lastinkrementes gelten dann in guter Näherung die infinitesimalen Verzerrungsbeziehungen. Die akkumulierte plastische Vergleichsdehnung entspricht dann dem HENCKYSchen Verzerrungsmaß und kann daher als wahre plastische Dehnung betrachtet werden:

$$\varepsilon^{\text{H}} = \varepsilon_V^{\text{pl}} + \frac{\sigma_V}{E}, \quad \varepsilon_V^{\text{pl}} = \int d\varepsilon_V^{\text{pl}}. \quad (4.79)$$

Das isotrope Verfestigungsgesetz lautet allgemein

$$\sigma_{\text{F}}(\varepsilon_V^{\text{pl}}) = \sigma_{\text{F}0} + R(\varepsilon_V^{\text{pl}}) \quad (4.80)$$

und wird auch als Fließkurve bezeichnet. Die Fließkurve wird üblicherweise im einachsigen Zugversuch durch Umrechnung der technischen Spannungs-Dehnungs-Kurve ermittelt. Die Fließbedingung nach v. MISES mit isotroper Verfestigung lautet

$$f_{\text{Mises}}(\sigma_{ij}^{\text{D}}, \varepsilon_V^{\text{pl}}) = \frac{3}{2} \sigma_{ij}^{\text{D}} \sigma_{ij}^{\text{D}} - \left(\sigma_{\text{F}0} + R(\varepsilon_V^{\text{pl}}) \right)^2 = 0. \quad (4.81)$$

Für die Entwicklung der Fließ- bzw. Verfestigungsfunktion $\dot{\sigma}_{\text{F}} = \dot{R}$ kann man

$$\dot{R}(\varepsilon_V^{\text{pl}}) = \frac{dR(\varepsilon_V^{\text{pl}})}{d\varepsilon_V^{\text{pl}}} \varepsilon_V^{\text{pl}} = T_{\text{p}}(\varepsilon_V^{\text{pl}}) \dot{\varepsilon}_V^{\text{pl}} \quad (4.82)$$

schreiben, wobei $T_{\text{p}}(\varepsilon_V^{\text{pl}})$ den plastischen Tangentenmodul bezeichnet. Die Verfestigungskurve kann durch verschiedene mathematische Funktionen approximiert werden, wobei üblicherweise einfache parametrische Ansätze mit möglichst wenigen Parametern bevorzugt werden. Die Verfestigungsfunktion muss lediglich folgende beiden Bedingungen

$$R(\varepsilon_V^{\text{pl}} = 0) = 0 \quad \text{und} \quad T_{\text{p}}(\varepsilon_V^{\text{pl}}) \geq 0 \quad (4.83)$$

erfüllen, sie darf also nicht negativ werden und keinen negativen Anstieg besitzen. Die Wahl einer geeigneten Verfestigungsfunktion erfolgt später im Kapitel 6 dieser Arbeit. Die Charakterisierung des plastischen Verformungsverhaltens mit dem SPT erfordert dann die Identifikation der Anfangsfließgrenze $\sigma_{\text{F}0}$ und der Parameter p_i der noch zu wählenden Verfestigungsfunktion $R(\varepsilon_V^{\text{pl}}, p_i)$.

4.3 Identifikation konstitutiver Materialparameter

4.3.1 Experiment, Simulation, Fehleroptimierung

Die Simulation des mechanischen Bauteilverhaltens erfordert die numerische Lösung eines mechanischen Randwertproblems (RWP). Außer der Bauteilgeometrie und den Randbedingungen müssen auch die mechanischen Eigenschaften des Werkstoffs mit einem mathematischen Modell beschrieben werden. Während geometrische Parameter und die Randbedingungen meist bekannt sind, stellen die Parameter der konstitutiven Materialgleichungen häufig unbekannte Modellparameter dar. Die Aufgabe der Parameteridentifikation besteht nun darin, die unbekannten Zahlenwerte der werkstoffspezifischen Modellparameter aus geeigneten Experimenten zu bestimmen. Das Experiment liefert die empirische Lösung eines RWP. Ein geeignetes Experiment zeichnet sich dadurch aus, dass die Wirkung der zu identifizierenden Materialparameter messbar ist, denn nur über ihre Wirkung können diese identifiziert werden. In den konstitutiven Gleichungen quantifizieren die Materialparameter den Zusammenhang zwischen lokalen Spannungen und Verzerrungen. Im Experiment begnügt man sich häufig mit der Messung der globalen mechanischen Antwort. Dies kann zum Beispiel die Kraft-Einschnürungs-Kurve des Zugversuchs oder eben die Kraft-Verschiebungs-Kurve des SPT sein. Weil die Lösung des RWP aus dem Experiment ermittelt wird, die konstitutiven Materialparameter jedoch unbekannte Eingangsgrößen für das mechanische Modell sind, spricht man vom inversen Problem der Materialparameteridentifikation. Im Allgemeinen kann das inverse Problem nicht durch Invertieren der Modellgleichungen gelöst werden. Um dennoch die Materialparameter bestimmen zu können, bedient man sich numerischer Simulationen des Experiments und nichtlinearer Optimierungsverfahren, wobei sehr unterschiedliche Experimente und Identifikationsmethoden zur Anwendung kommen, wie zum Beispiel ein Blick in die Arbeiten von [Abe04], [Spr05] oder [Lin10] zeigt. Das Ziel der Parameteroptimierung besteht darin, denjenigen Parametersatz zu berechnen, welcher die beste Anpassung der simulierten an die gemessenen Daten ermöglicht. Die Optimierung ist allerdings nur für jene Parameter sinnvoll, die einen beobachtbaren Einfluss auf das Simulationsergebnis haben, welcher größer als das numerische Rauschen ist.

Durch die Zielstellung dieser Arbeit ist das Experiment vorgegeben: der SPT. Das Versuchsergebnis ist die Kraft-Verschiebungs-Kurve des Stempels. Die zu identifizierenden Materialparameter sind die elastischen Konstanten, die Fließgrenze und die Verfestigungsparameter. Als Simulationswerkzeug für die Lösung des direkten mechanischen RWP wird die FEM verwendet. In den folgenden Unterabschnitten wird nun näher auf die inverse Problemstellung, die Formulierung der zu minimierenden Zielfunktion und mögliche Optimierungsverfahren eingegangen.

4.3.2 Inverses Problem

Eine präzise Definition des Begriffs „inverses Problem“ ist möglich, wenn man von einem mathematischen Modell eines physikalischen Prozesses mit eindeutig definierten Eingangs- und Ausgangsgrößen sowie einer Anzahl von Modellgleichungen mit Systemparametern ausgeht [Wol94]. Ein mechanisches Experiment kann als solch ein modellierbarer Prozess aufgefasst werden, der sich mathematisch mit Hilfe einer Operatorgleichung darstellen lässt [Hof99]. Seien $X \subset \mathbb{R}^{n_x}$ der Raum der Eingangsgrößen (Steuerparameter) \mathbf{x} , $Y \subset \mathbb{R}^{n_y}$ der Raum der Ausgangsgrößen \mathbf{y} und $P \subset \mathbb{R}^{n_p}$ der Raum der Systemparameter (Modellparameter) \mathbf{p} , so kann das Systemverhalten mathematisch in Form der Operatorgleichung

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \mathbf{y} \quad (4.84)$$

geschrieben werden. Darin repräsentiert $\mathcal{F} : X \rightarrow Y$ den im Allgemeinen nichtlinearen Vorwärtsoperator des direkten Problems. Er ist durch ein System von Differentialgleichungen des zugrunde liegenden RWP gegeben, \mathbf{y} repräsentiert dessen Lösung. Für den Spezialfall eines linearen Vorwärtsoperators $\mathcal{A} : X \rightarrow Y$ erhält man die lineare Operatorgleichung

$$\mathcal{A}(\mathbf{p}) \mathbf{x} = \mathbf{y}. \quad (4.85)$$

Weil für reale Probleme die soeben definierten Größen nur physikalisch sinnvolle Werte annehmen sollen, ist die Restriktion auf abgeschlossene Teilmengen X , Y und P des jeweiligen n -dimensionalen Euklidischen Vektorraumes \mathbb{R}^n notwendig.

Man unterscheidet bezüglich (4.84) oder (4.85) drei Arten von Problemen [Wol94]:

- (A) das direkte Problem der Berechnung der Ausgangsgrößen $\mathbf{y} \in Y$ bei gegebenen Eingangsgrößen $\mathbf{x} \in X$ und Modellparametern $\mathbf{p} \in P$;
- (B) das Rekonstruktionsproblem der Auflösung nach den Eingangsgrößen $\mathbf{x} \in X$ bei gegebenen Ausgangsgrößen $\mathbf{y} \in Y$ und Modellparametern $\mathbf{p} \in P$;
- (C) das Identifikationsproblem der Bestimmung von Modellparametern $\mathbf{p} \in P$ bei gegebenen Eingangsgrößen $\mathbf{x} \in X$ und Ausgangsgrößen $\mathbf{y} \in Y$.

(B) und (C) sind inverse Probleme. In einem verschiebungsgesteuerten Experiment wie dem SPT stellt die Stempelverschiebung die Eingangsgröße, die gemessene Stempelkraft die Ausgangsgröße dar. Die Materialparameter sind unbekannte Modellparameter, die bestimmt werden sollen. Es handelt sich also um ein Identifikationsproblem (C). Im Hinblick auf die Materialparameteridentifikation kann das Modell des mechanischen Experiments als „Black Box“ aufgefasst werden, in die bekanntes Wissen in Form von Geometrie, Randbedingungen und Materialgleichungen hineingesteckt wird und für die nur die unbekann-

ten Parameter der Materialgleichungen zu bestimmen sind. Die Auswahl eines adäquaten Materialmodells obliegt in der Regel der Erfahrung des Anwenders. Es sollte dasjenige ausgewählt werden, welches die beste Anpassbarkeit an die Messergebnisse ermöglicht.

Bei der Lösung von inversen Problemen spielen die mathematischen Eigenschaften der Lösung eine wichtige Rolle. Ein Problem (direkt oder invers) gilt nach HADAMARD [Had02] als korrekt oder gut gestellt, wenn folgende drei Voraussetzungen erfüllt sind:

1. Es existiert eine Lösung des Problems.
2. Die Lösung ist eindeutig.
3. Die Lösung ist stabil (hängt stetig von den Daten ab).

Die Forderung nach Stabilität bedeutet, dass kleine Störungen (das können Fehler in den Messungen oder bei der numerischen Berechnung der Lösung sein) auch nur kleine Störungen der Lösung zur Folge haben. Dies bedingt natürlich, dass die Lösung stetig von den Eingangsdaten abhängt. Wird einer dieser drei Punkte verletzt, heißt das Problem inkorrekt oder schlecht gestellt. Das direkte Problem ist meist ein gut gestelltes Problem, solange keine Instabilitäten auftreten. Dagegen sind die meisten inversen Probleme, wie auch das der Materialparameteridentifikation, aufgrund der Natur des Randwertproblems schlecht gestellt [Spr05, Lin10]. Um einen Stabilisierungseffekt für inverse Probleme zu erhalten, können sogenannte Regularisierungsverfahren angewandt werden. Eine Darstellung solcher Verfahren findet sich z.B. bei LOUIS [Lou79]. Die einfachste und naheliegendste Form der Regularisierung besteht in der Beschränkungen der Materialparameter auf physikalisch sinnvolle Bereiche, also der Angabe zusätzlicher Informationen für das inverse Problem. Einen Regularisierungseffekt erhält man auch durch die Approximation des realen Problems, wobei der dadurch eingebrachte Fehler in bestimmten Fällen erst die Lösung des inversen Problems ermöglicht. Das gleiche gilt für Diskretisierungsverfahren, wozu auch die Methode der kleinsten Fehlerquadrate gezählt werden kann.

Weil für allgemeine RWP mit nichtlinearem Materialverhalten der Operator \mathcal{F} in der Regel nicht explizit angegeben werden kann, ist auch keine Invertierung der Beziehung (4.84) möglich. Um dennoch das Identifikationsproblem zu lösen, wird nach denjenigen unbekannten Parametern \mathbf{p} gesucht, welche die beste Übereinstimmung von simulierten Modellergebnissen \mathbf{y} und gemessenen Versuchsergebnissen $\bar{\mathbf{y}}$ liefern. Die systematische Suche erfordert die Formulierung einer skalaren Fehlernorm (Zielfunktion), welche die Abweichung zwischen Modell und Experiment beschreibt (Abschnitt 4.3.3) und deren Minimierung mit Hilfe nichtlinearer Optimierungsalgorithmen (Abschnitt 4.3.4). Zusätzlich können auch Nebenbedingungen (Restriktionen) für die zu identifizierenden Parameter formuliert werden, um sicherzustellen, dass nur physikalisch sinnvolle Parameterkombinationen bestimmt werden. Jedoch sieht es der Autor in diesem Zusammenhang genauso wie

zum Beispiel BENEDIX [Ben00] als sinnvoll an, unrestringierte inverse Probleme zu lösen. Bei geeigneter Wahl des mechanischen Modells und ausreichender Genauigkeit der Messwerte kann erwartet werden, dass die physikalisch begründeten Restriktionen automatisch erfüllt werden. Andernfalls wird dies als sicherer Hinweis auf Fehler im Materialmodell, im Experiment oder in der numerischen Simulation interpretiert.

Die Messdatenerfassung ist mit systematischen und zufälligen Messfehlern behaftet, welche sich auf das Identifikationsergebnis auswirken [Kre01]. Bei der Wiederholung von Experimenten unter anscheinend nominell gleichen Versuchsbedingungen werden in der Regel keine identischen Messergebnisse beobachtet. Auch wenn alle systematischen Fehlerinflüsse abgestellt werden könnten, bleibt das zufällige „Messrauschen“, bedingt durch das Messverfahren. Zufällige Messfehler sind im Allgemeinen stochastischer Natur, deren statistische Untersuchung nur mit Hilfe wiederholter Messungen möglich ist. Systematische Fehler sollten weitestgehend vermieden werden oder im unvermeidbaren Fall mittels Korrektur im Berechnungsmodell erfasst werden.

4.3.3 Nichtlineares Ausgleichsproblem

Bei der Materialparameteridentifikation wird ein Parametersatz von n_p unbekannten Materialparametern p_i , zusammengefasst zum Vektor $\mathbf{p} = [p_1, \dots, p_{n_p}]^T$, gesucht, der die beste Übereinstimmung zwischen Berechnungsmodell und Experiment liefert. Da das Modell die physikalische Realität in der Regel nur näherungsweise beschreibt und die gemessenen Daten mit Messfehlern behaftet sind, existiert oft keine exakte Lösung des inversen Problems, es ist daher schlecht gestellt. Jedoch kann eine Näherungslösung gefunden werden, indem die Abweichung zwischen dem Ergebnis des Berechnungsmodells $\mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ und des Experimentes $\bar{\mathbf{y}}$ minimiert wird. Da normalerweise immer eine von Null verschiedene Restabweichung zwischen Experiment und Simulation verbleibt, wird das Minimierungsproblem zu einem nichtlinearen Ausgleichsproblem, für dessen Lösung sich die Methode der kleinsten Fehlerquadrate eignet. Die skalarwertige Zielfunktion $\Phi(\mathbf{p})$ beschreibt die Fehlernorm. Es wird nun der spezielle Parametervektor \mathbf{p}^* gesucht, der die Zielfunktion minimiert:

$$\Phi(\mathbf{p}) = \|\mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) - \bar{\mathbf{y}}\| \rightarrow \min \quad (4.86)$$

$$\Phi(\mathbf{p}^*) = \min_{\mathbf{p} \in P} \Phi(\mathbf{p}) . \quad (4.87)$$

Im SPT liegt die Materialantwort in Form der Kraft-Verschiebungs-Kurve vor. Im Prinzip könnte die Fläche zwischen simulierter und gemessener Kurve minimiert werden, jedoch erweist sich die Minimierung des Fehlerquadratintegrals als günstiger, weil dann große Abweichungen stärker gewichtet werden. Verwendet man anstelle des absoluten Fehlers den relativen Fehler der Stempelkraft und führt eine Normierung mit der Länge des betrach-

teten Verschiebungsintervalls $u_{\max} - u_{\min}$ durch, erhält man schließlich als Zielfunktion den gemittelten quadratischen relativen Fehler im Intervall $[u_{\min}, u_{\max}]$:

$$\Phi(\mathbf{p}) = \frac{1}{u_{\max} - u_{\min}} \int_{u_{\min}}^{u_{\max}} \left(\frac{F_{\text{sim}}(u, \mathbf{p}) - F_{\text{exp}}(u)}{F_{\text{exp}}(u)} \right)^2 du \rightarrow \min. \quad (4.88)$$

Mittels Diskretisierung kann das Integral numerisch angenähert werden. Die Zielfunktion für N Verschiebungswerte u_1, u_2, \dots, u_N lässt sich dann als Fehlerquadratsumme

$$\Phi(\mathbf{p}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(\frac{F_{\text{sim}}(u_k, \mathbf{p}) - F_{\text{exp}}(u_k)}{F_{\text{exp}}(u_k)} \right)^2 \rightarrow \min \quad (4.89)$$

formulieren, welche numerisch sehr einfach berechnet werden kann. (4.89) beschreibt den Mittelwert des quadrierten relativen Fehlers.

4.3.4 Optimierungsverfahren

Um das Minimierungsproblem für die Materialparameteridentifikation zu lösen, werden nichtlineare Optimierungsalgorithmen verwendet. Ausgehend von einem Startparametersatz wird sich dem optimalen Parametersatz iterativ genähert. Das Optimierungsverfahren hat dabei das Problem zu bewältigen, die richtige Suchrichtung mit einer adäquaten Schrittweite (nicht zu groß und nicht zu klein) zu wählen sowie nicht in einem lokalen Minimum hängen zu bleiben, sondern das globale Minimum zu finden. Optimierungsverfahren können nach verschiedenen Gesichtspunkten eingeteilt werden, man unterscheidet:

a) ableitungsfreie und gradientenbasierte Verfahren:

Ableitungsfreie Verfahren benötigen nur die Berechnung des Wertes der Zielfunktion. Verfahren, welche die erste oder höhere Ableitungen der Zielfunktion nach den Parametern verwenden, nennt man gradientenbasierte Verfahren.

b) deterministische und stochastische Verfahren:

Bei deterministischen Verfahren werden alle Entscheidungen im iterativen Optimierungsalgorithmus nach festen Regeln getroffen. Stochastische Verfahren treffen mindestens an einer Stelle im Algorithmus eine Entscheidung zufällig.

c) Verfahren für restringierte und unrestringierte Probleme:

Wird der zulässige Parameterbereich durch Gleichungen und/oder Ungleichungen eingeschränkt, spricht man von restringierten Problemen. Zum Beispiel können dies physikalisch sinnvolle Ober- und Untergrenzen der Parameter sein ($p_u \leq p \leq p_o$). Für unrestringierte Probleme gilt demzufolge $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p}$.

Eine Auswahl von Optimierungsverfahren enthält Tabelle 4.1.

Tabelle 4.1: Klassifizierung von nichtlinearen Optimierungsverfahren für die Parameteridentifikation

	ableitungsfrei	gradientenbasiert
deterministisch	Grid-Search Powell Downhill-Simplex	Steilster Abstieg Newton Gauss-Newton Trust-Region Levenberg-Marquardt
stochastisch	Monte-Carlo Evolutionäre Algorithmen Simulated Annealing	

Die Wahl eines geeigneten Optimierungsverfahrens hängt maßgeblich von der Topologie der Zielfunktion ab. Wenn $\Phi(\mathbf{p})$ konvex ist, spricht man auch von konvexer Optimierung. Hierfür sind Theorie und numerische Methoden weit entwickelt (z.B. [Kel99]). Ein lokales Minimum ist dann zugleich auch globales Minimum. Wenn die Zielfunktion nicht konvex ist, können neben dem globalen Minimum auch mehrere lokale Minima auftreten. Gradientenverfahren kann dies zum Beispiel Probleme bereiten, denn sie nähern sich dem nächsten lokalen Minimum und verharren dort, anstelle weiter nach dem globalen Minimum zu suchen. Existieren mehrere gleichwertige lokale Minima, zum Beispiel in einem lang gestreckten Tal des Zielfunktional, so ist die Lösung mehrdeutig und das Problem ist instabil bzw. schlecht gestellt [Rie05, Mah97]. Eine korrekte Identifikation der Materialparameter ist dann nicht möglich. Aufschluss über das Maß der Instabilität bietet die Konditionszahl der Hesse-Matrix der Zielfunktion [Rie05, Mah97]

$$k = \frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}} \quad (4.90)$$

mit den kleinsten und größten Eigenwerten λ_{\min} und λ_{\max} . Ursachen für mehrdeutige Lösungen können zum Beispiel Abhängigkeiten zwischen den zu identifizierenden Modellparametern sein, wenn zu viele freie Parameter gewählt wurden. Oder die experimentellen Messungen sind nicht in der Lage alle physikalischen Phänomene widerzuspiegeln, welche durch die Parameter beeinflusst werden.

Bei der klassischen Vorgehensweise der Materialparameteridentifikation wird in jeder Iteration des Optimierungsverfahrens das FEM-Programm ein oder mehrmals aufgerufen (z.B. [Mah97, Spr05]) um in einer Vorwärtsrechnung das RWP numerisch zu lösen. Liegt keine gute Startnäherung vor, kann dies sehr aufwendig werden. Der Rechenaufwand steigt in der Regel proportional mit der Zahl der Iterationen. Soll die Identifikation für eine größere Anzahl von gemessenen Kraft-Verschiebungs-Kurven durchgeführt werden, wird

die direkte Lösung des RWP mit der FEM für die Berechnung von $F_{\text{sim}}(u, \mathbf{p})$ uneffizient, da sich nun der Rechenaufwand auch noch mit der Zahl der geprüften Proben multipliziert.

Neuere Entwicklungen bei der Parameteridentifikation gehen in Richtung Künstliche Neuronale Netze [Hub99a, Hub99b, Abe04] und Response-Surface-Methoden [Mye95, Box05]. Beide Methoden können die direkte Lösung des RWP approximieren. Grundlage bildet eine Datenbasis aus simulierten Versuchsergebnissen mit systematisch variierten Materialparametern. Neuronale Netze „erlernen“ die Lösung durch trainieren mit Kurven der Datenbasis. Bei der Response-Surface-Methode wird die Lösung durch mehrdimensionale lineare oder quadratische Interpolation zwischen den Kurven der Datenbasis approximiert. Beide Methoden besitzen den Vorteil, dass für ein gegebenes Materialmodell bei unveränderter Versuchsgeometrie nach der Berechnung der Datenbasis keine weiteren FEM-Simulationen mehr durchgeführt werden müssen. Die Fehlerminimierung kann anschließend mit unterschiedlichen Optimierungsverfahren erfolgen. Die Kombination aus flexibler Approximation unbekannter funktionaler Zusammenhänge mit nichtlinearen Optimierungsverfahren macht die eigentliche Effizienz und allgemeine Anwendbarkeit beider Methoden aus.

Der Autor gibt in dieser Arbeit der Response-Surface-Methode den Vorzug, die im nächsten Abschnitt vorgestellt wird. Ein wesentlicher Nachteil eines Neuronalen Netzes besteht darin, dass es praktisch nur im Ganzen trainiert werden kann und gegebenenfalls bei mehreren Datenbasen in seiner Struktur verändert werden muss, sodass mehrere Neuronale Netze trainiert werden müssten (siehe [Abe04]). Die Response-Surface-Approximation kann außerdem durch einfaches Hinzufügen neu berechneter Kurven zur Datenbasis erweitert werden, der zusätzliche Rechenaufwand für das erneute Training des Neuronalen Netzes entfällt. Die Fehlerminimierung erfolgt zwischen experimentell ermittelter Kraft-Verschiebungs-Kurve und der Response-Surface-Approximation der Kurve im Parameterraum. Die kleinsten und größten Parameterwerte der Datenbasis begrenzen einen Körper im Parameterraum, innerhalb dem das Parameteroptimum gesucht wird.

4.4 Response-Surface-Modellierung

4.4.1 Einführung

Zur Erklärung des Begriffes Response-Surface-Methode (RSM) geben MYERS und MONTGOMERY im Vorwort ihres englischen Buches [Mye95] eine hervorragende Beschreibung, die sich kaum besser formulieren lässt und hier sinngemäß übersetzt wiedergegeben wird:

„Wenn die Beziehung zwischen einer Antwortgröße y eines Experiments und den Einflussfaktoren x_1, x_2, \dots, x_n genau bekannt ist (basierend auf physikalischen, chemischen oder anderen Prinzipien), kann ein mathematisches Modell in der Form

$y = g(x_1, x_2, \dots, x_n) + \varepsilon$ geschrieben werden, wobei ε den Fehler im Modell beschreibt. Dieser Typ von Modellgleichungen wird oft ein ‚mechanistisches Modell‘ genannt.

Betrachtet man die häufige Situation, in der die zugrunde liegenden Mechanismen nicht ausreichend verstanden werden, besteht die Möglichkeit, die unbekannte Funktion g mit einem empirischen Modell $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \varepsilon$ zu approximieren. Gewöhnlich ist die approximierende Funktion f ein Polynom erster oder zweiter Ordnung. Ein solches empirisches Modell wird ‚Response-Surface-Modell‘ genannt.

Die Identifikation eines geeigneten Response Surface Modells aus experimentellen Daten erfordert Wissen aus den Bereichen der statistischen Versuchsplanung (*design of experiments*), der Regressionsanalyse und der Optimierungsmethoden. Die Kombination dieser Methoden wird allgemein als ‚Response-Surface-Methodik‘ bezeichnet.“

Das Ziel ist es, mit möglichst wenigen Versuchen den Wirkzusammenhang zwischen den Einflussfaktoren (unabhängige Variablen oder Modellparameter) und der Zielgröße (abhängige Variable oder Modellantwort) möglichst genau zu ermitteln. Im Gegensatz zur althergebrachten Vorgehensweise nur jeweils einen Faktor zu variieren (während die anderen festgehalten werden), werden bei der RSM mehrere Parameter gleichzeitig variiert und somit auch Interaktionen der Einflussparameter erfasst. Unter „Versuch“ oder „Experiment“ kann ein reales Experiment oder die Rechnersimulation verstanden werden [Box05]. Die zu untersuchenden Faktoren sind im Fall dieser Arbeit die Parameter eines elastisch-plastischen Materialgesetzes, die Antwortgröße ist die Stempelkraft im SPT.

4.4.2 Modellantwort und Versuchsplan

Die Response-Surface-Modellierung wird aus Anschauungsgründen am Beispiel von zwei Einflussgrößen x_1 und x_2 vorgestellt. Man kann die Modellantwort dann bildlich als Antwortfläche (Response Surface) über der $x_1 - x_2$ -Ebene im dreidimensionalen Anschauungsraum \mathbb{R}^3 darstellen (siehe Abschnitt 4.4.3). Diese graphische Darstellung hat der Response Surface Methode ihren Namen gegeben. Alternativ kann die Modellantwort auch als Konturplot in der $x_1 - x_2$ -Ebene dargestellt werden. Punkte mit gleicher Antwort y sind darin durch eine Linie (Isolinie) verbunden. Bei mehr als zwei Einflussgrößen ist eine anschauliche Darstellung nicht mehr möglich. Jedoch kann die Modellantwort bei n Einflussgrößen mathematisch als $n + 1$ -dimensionale Hyperfläche über der n -dimensionalen Hyperebene im Raum \mathbb{R}^{n+1} aufgefasst werden.

Die Antwortfläche wird durch lineare oder quadratische Polynome in jeder Variablen beschrieben. Die topologische Anordnung der Stützstellen für die Polynominterpolation im Raum \mathbb{R}^n der Einflussgrößen nennt man auch Versuchsplan (Abb. 4.2). Hier werden nur vollständige faktorielle Versuchspläne erster und zweiter Ordnung betrachtet, bei der jede

Einflussgröße mit jeder anderen kombiniert wird. Daneben gibt es noch reduzierte Versuchspläne (fractional factorial designs) [Mye95], die mit weniger Versuchen auskommen, weil Wechselwirkungsterme vernachlässigt werden.

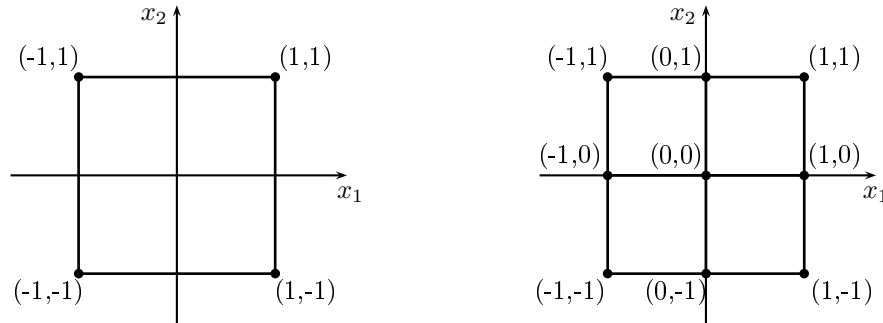


Abbildung 4.2: Zwei- und dreistufiger faktorieller Versuchsplan für zwei Einflussfaktoren x_1 und x_2

4.4.3 Response-Surface-Modelle

Lineares Modell (*first-order design*)

Zunächst wird ein lineares Regressionsmodell mit zwei Einflussgrößen x_1 und x_2 (unabhängige Variable) betrachtet. Die Modellantwort y (abhängige Variable) wird durch die Funktionsgleichung

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon \quad (4.91)$$

beschrieben. β_0 , β_1 und β_2 sind die Koeffizienten des linearen Regressionsmodells und ε bezeichnet den Fehler des Modells. Die Gleichung $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$ beschreibt eine geneigte Ebene in \mathbb{R}^3 . Durch die Erweiterung mit einem gemischten Term $\beta_{12} x_1 x_2$ wird die Ebene zu einer verdrehten Fläche (siehe Abb. 4.3). Diese Verdrehung beschreibt die Interaktion der Einflussgrößen. Ein lineares Response-Surface-Modell der Form

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{12} x_1 x_2 + \varepsilon \quad (4.92)$$

wird auch vollständiger faktorieller Versuchsplan (*first-order factorial design*) genannt. Bei der Verallgemeinerung auf n Parameter besitzt ein solches Modell 2^n Koeffizienten. Die Bestimmung der Modellkoeffizienten erfordert mindestens 2^n Beobachtungen aus realen oder Computerexperimenten. Weil in der Regressionsanalyse normalerweise mehr Beobachtungen als Modellkoeffizienten zur Verfügung stehen, werden diese mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate bestimmt. Für den Sonderfall, dass genauso viele Beobachtungen wie Modellparameter vorliegen, kann bei geeigneter Wahl der unabhängigen Variablen zwischen den Beobachtungen exakt interpoliert werden, d.h. die Methode der kleinsten Fehlerquadrate würde den Fehler $\varepsilon = 0$ liefern. Wenn vier Beobachtungen (y_i, x_{1i}, x_{2i}) für

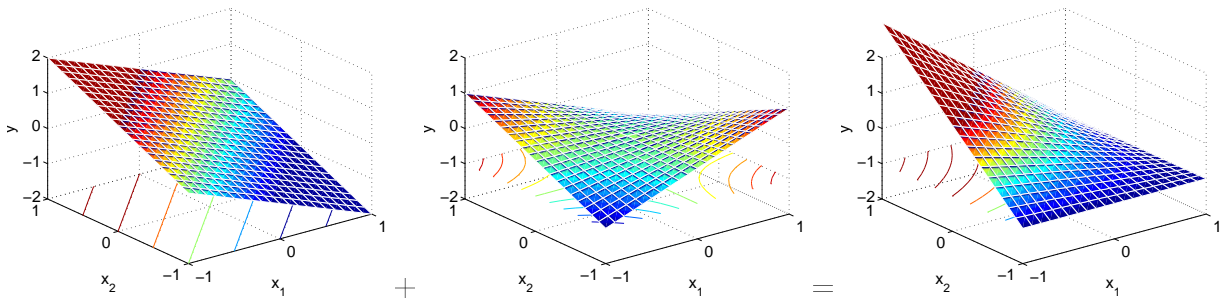


Abbildung 4.3: Überlagerung der linearen Terme $\beta_1 x_1$ und $\beta_2 x_2$ (links) mit dem Interaktionsterm $\beta_{12} x_1 x_2$ (mitte) zur Antwortfläche des linearen Modells ($\beta_0 = 0$, $\beta_1 = -1$, $\beta_2 = 1$, $\beta_{12} = -1$) auf $[-1; 1] \times [-1; 1]$

das Modell in Gleichung (4.92) vorliegen, kann das lineare Gleichungssystem

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_{12} x_{1i} x_{2i}, i = 1, 2, 3, 4 \quad (4.93)$$

gelöst werden, um die vier Modellkoeffizienten β_0 , β_1 , β_2 und β_{12} zu berechnen.

Quadratisches Modell (*second-order design*)

Ein vollständiger faktorieller quadratischer Versuchsplan (*second-order factorial design*) mit zwei Einflussgrößen besteht aus $3^2 = 9$ Designpunkten, das zugehörige Modell lautet

$$\begin{aligned} y &= \beta_{00} + \beta_{10} x_1 + \beta_{01} x_2 + \beta_{11} x_1 x_2 + \beta_{20} x_1^2 + \beta_{02} x_2^2 + \beta_{21} x_1^2 x_2 + \beta_{12} x_1 x_2^2 + \beta_{22} x_1^2 x_2^2 \\ &= \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 \beta_{ij} x_1^i x_2^j. \end{aligned} \quad (4.94)$$

Die Koeffizienten β_{00} , β_{10} , β_{01} und β_{11} beschreiben wieder den linearen Anteil des Modells. Die Koeffizienten β_{20} und β_{02} beschreiben die Krümmung und β_{21} , β_{12} sowie β_{22} beschreiben die quadratische Interaktion der Einflussgrößen. Die Antwortflächen der Terme, die quadratisch in x_1 sind, veranschaulicht Abbildung 4.4. Die Bestimmung der Koeffizienten erfordert nun mindestens neun Beobachtungen. Bei genau neun Beobachtungen (x_{1k}, x_{2k}, y_k) kann quadratisch interpoliert werden, wobei das Gleichungssystem

$$y_k = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 \beta_{ij} x_{1k}^i x_{2k}^j, k = 1, \dots, 9 \quad (4.95)$$

zu lösen ist. Allgemein besitzen vollständige quadratische Versuchspläne für n Parameter 3^n Designpunkte. Mit zunehmender Parameterzahl übersteigt die Anzahl der notwendigen Beobachtungen schnell die Anzahl der überhaupt realisierbaren Beobachtungen, weshalb dann auf reduzierte oder faktorielle Versuchspläne ausgewichen werden muss.

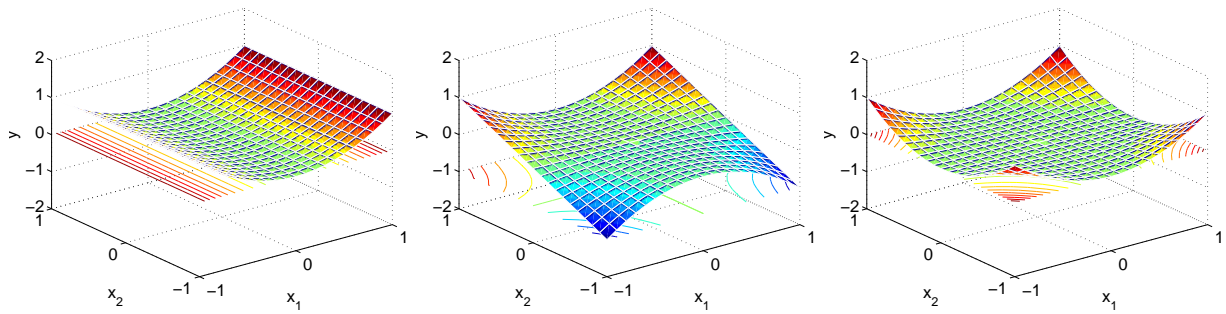


Abbildung 4.4: Antwortflächen der Terme $\beta_{20}x_1^2$ (links), $\beta_{21}x_1^2x_2$ (mitte) und $\beta_{22}x_1^2x_2^2$ (rechts) des quadratischen Modells auf $[-1; 1] \times [-1; 1]$ mit $\beta_{20} = \beta_{21} = \beta_{22} = 1$

4.5 Bruchmechanische Grundlagen

Sicherheitsbewertungen für rissbehaftete Bauteile basieren auf bruchmechanischen Konzepten, denen ein kontinuumsmechanisches Rissmodell zugrunde liegt. Aus mathematischer Sicht stellt eine scharfe Rissspitze eine Singularität dar, die zu unendlich großen Spannungen führt. In der Bruchmechanik wird jedoch nicht nur die Spannung in einem Punkt betrachtet, sondern die Materialbeanspruchung in der Umgebung der Rissspitze. Die Trennung von Materialbindungen in der sogenannten Prozesszone führt zum Wachstum eines Risses, jedoch nicht notwendigerweise zum Versagen des gesamten Bauteils, weshalb zwischen stabiler und instabiler Rissausbreitung unterschieden wird.

4.5.1 Rissmodelle und -beanspruchung

Betrachtet man die möglichen Relativbewegungen der Rissoberflächen bezüglich einer Ebene senkrecht zur Rissfront (x_1 - x_2 -Ebene) können drei grundlegende Rissöffnungsarten oder -moden unterschieden werden (siehe Abbildung 4.5):

- Modus I: Zugbelastung senkrecht zur Rissoberfläche führt zum Abheben der Rissufer.
- Modus II: Ebene Schubbelastung führt zur Scherung der Rissufer längs dieser Ebene.
- Modus III: Nichtebeine Schubbelastung führt zur Scherung quer zur Ebene.

Von praktischer Bedeutung ist vorrangig die Modus-I Rissöffnungsart. Sie gibt in vielen Fällen die Verhältnisse im realen Bauteil bei einem Spröbruch am besten wieder.

Das bekannteste Rissmodell wurde 1921 von GRIFFITH [Gri21] in Verbindung mit seinem bruchmechanischen Konzept der Energiefreisetzungsrate eingeführt. Als GRIFFITH-Riss bezeichnet man einen geraden Riss der Länge $2a$ in einer unendlich ausgedehnten Scheibe, der infolge einachsiger Zugspannung senkrecht zum Riss im Modus I geöffnet wird. Das Stabilitätskriterium nach GRIFFITH besagt, dass die bei Verlängerung des Risses um

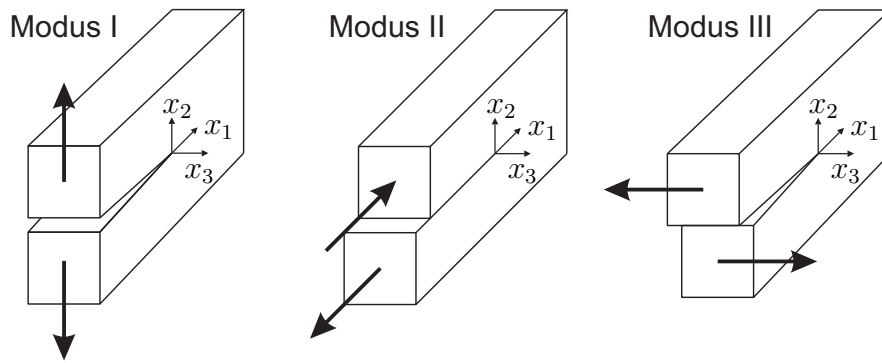


Abbildung 4.5: Die drei Grundbeanspruchungsarten eines Risses

da frei werdende elastische Verzerrungsenergie dW^{el} größer oder gleich der Energie $2\gamma_0 dA$ zur Bildung neuer Oberflächen sein muss. γ_0 bezeichnet die spezifische Oberflächenenergie. Der Faktor 2 erscheint, weil zwei Bruchflächen gebildet werden. Für die kritische Normalspannung, die zu instabilem Risswachstum führt, gilt unter der Annahme des ebenen Spannungszustandes [And05]

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{2E\gamma_0}{\pi a}}. \quad (4.96)$$

Das Griffith-Modell hat den Nachteil, dass es nur für den Spröbruch elastischer Materialien (z.B. Glas) anwendbar ist. Eine Erweiterung auf den quasispröden Bruch metallischer Werkstoffe erreichten unabhängig voneinander IRWIN und OROWAN (siehe [And05]) durch die Berücksichtigung kleiner plastischer Zonen an der Risspitze, indem sie γ_0 einen plastischen Energieanteil γ_p hinzufügten. Aus der Betrachtung der Energiebilanz bei Rissausbreitung entwickelte IRWIN das Konzept der Energiefreisetzungsrate \mathcal{G} . Die erforderliche Energie für die Bildung neuer Rissoberflächen stammt aus der in einem verformten Bauteil gespeicherten elastischen Verzerrungsenergie und aus dem Arbeitsvermögen einer wirkenden konservativen Kraft. Sie stellt also ein Potential Π dar, das bei Rissfortschritt abnimmt:

$$\mathcal{G} = -\frac{d\Pi}{dA}. \quad (4.97)$$

Risswachstum tritt ein, wenn der kritische Materialkennwert

$$\mathcal{G}_c = 2(\gamma_0 + \gamma_p) = 2\gamma_f. \quad (4.98)$$

erreicht wird [And05]. Schließlich begründete IRWIN 1957 das Konzept der Spannungsintensitätsfaktoren [Irw57], welche in einem linear-elastischen Körper den singulären Anteil der Spannungen im Nahfeld der Risspitze (sehr kleine Risspitzenumgebung im Vergleich zu Risslänge und Bauteilabmessungen) charakterisieren. Das Konzept der Spannungsintensitätsfaktoren und das Konzept der Energiefreisetzungsrate sind im Rahmen der linear-elastischen Bruchmechanik (LEBM) zueinander äquivalent, sie können mit Hilfe

der elastischen Konstanten ineinander umgerechnet werden. Die Anwendung der LEBM setzt voraus, dass die plastische Zone an der Rissspitze klein gegenüber den Riss- und Bauteilabmessungen bleibt (Kleinhereichsfließen). Andernfalls müssen Konzepte der elastisch-plastischen Bruchmechanik (EPBM) angewendet werden. Dazu zählt das J -Integral-Konzept. Allgemeine dreidimensionale Rissprobleme oder inelastisches Materialverhalten erfordern numerische Berechnungsmethoden, da bis auf einzelne Sonderfälle keine geschlossenen analytischen Lösungen möglich sind. Im Folgenden werden zwei bruchmechanische Beanspruchungsgrößen erläutert, welche heutzutage mit der FEM zuverlässig berechnet werden können [Ros82a, Kun10]: der Spannungsintensitätsfaktor K und das J -Integral.

4.5.2 Konzept der Spannungsintensitätsfaktoren

In einem linear-elastischen Körper wachsen die Spannungen mit Annäherung an die Rissspitze sehr stark an und werden an der Rissspitze theoretisch unendlich groß. Betrachtet man die Rissspitzenumgebung in polaren Koordinaten (Abb. 4.6), mit dem radialen Abstand von der Rissspitze r und dem Polarwinkels θ , so wird das Spannungsfeld an der Rissspitze durch einen singulären Term vom Typ $1/\sqrt{r}$ dominiert. Bei reiner Modus-I-Belastung kann das asymptotische Nahfeld an der Rissspitze durch [Kun10]

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad (4.99)$$

mit dem Spannungsintensitätsfaktor K_I und den dimensionslosen Funktionen $f_{ij}(\theta)$ beschrieben werden.

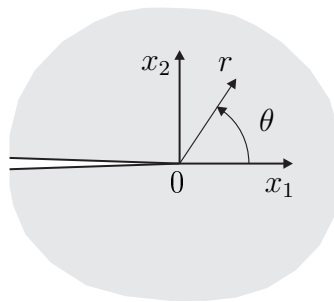


Abbildung 4.6: Kartesische und Polarkoordinaten an der Rissspitze

Die Intensität des singulären Spannungsfeldes kann analog für die Rissöffnungsmoden II und III durch die Spannungsintensitätsfaktoren K_{II} und K_{III} charakterisiert werden. Für den allgemeinen Fall einer kombinierten Belastung (Modus I, II und III) lautet die Nahfeldlösung der Spannungen

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} (K_I f_{ij}^I(\theta) + K_{II} f_{ij}^{II}(\theta) + K_{III} f_{ij}^{III}(\theta)) \quad (4.100)$$

und die asymptotische Lösung für die drei Verschiebungskomponenten

$$u_i = \frac{1}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (K_I g_i^I(\theta) + K_{II} g_i^{II}(\theta) + K_{III} g_i^{III}(\theta)) . \quad (4.101)$$

Die dimensionslosen Funktionen des Polarwinkels f_{ij}^I , f_{ij}^{II} , f_{ij}^{III} und g_i^I , g_i^{II} , g_i^{III} können in zahlreich vorhandenen Fachbüchern nachgeschlagen werden (z.B. [Ros82b, Gro07, Kun10]). An dieser Stelle wird nur die Lösung für die Modus-I-Belastung explizit angegeben, da die beiden anderen Rissöffnungsarten in dieser Arbeit keine Rolle spielen:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos(\theta/2) \begin{Bmatrix} 1 - \sin(\theta/2) \sin(3\theta/2) \\ 1 + \sin(\theta/2) \sin(3\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \cos(3\theta/2) \end{Bmatrix} , \quad (4.102)$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} \cos(\theta/2) [\kappa - \cos \theta] \\ \sin(\theta/2) [\kappa - \cos \theta] \end{Bmatrix} . \quad (4.103)$$

Dabei gilt für den

$$\begin{aligned} - \text{ebenen Spannungszustand (ESZ):} \quad & \sigma_{33} = 0, \quad \kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}, \\ - \text{ebenen Verzerrungszustand (EVZ):} \quad & \sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}), \quad \kappa = 3 - 4\nu. \end{aligned} \quad (4.104)$$

Erreicht die Rissbeanspruchung K_I einen kritischen materialspezifischen Wert K_{Ic} , der als Bruchzähigkeit bezeichnet wird, setzt die Rissausbreitung ein. Mit der Beziehung

$$K_{Ic} = \sigma_c \sqrt{\pi a} Y_I \quad (4.105)$$

kann die Bruchzähigkeit aus Experimenten mit dem nominellen Festigkeitswert σ_c und der Risslänge a bestimmt werden. Y_I ist ein dimensionsloser Korrekturfaktor, welcher den Einfluss der Geometrie und Belastung einer Probe berücksichtigt. Für den GRIFFITH-Riss gilt $Y_I = 1$. Der Vergleich mit Gl. (4.96) zeigt, dass dann $K_{Ic} = 2E\gamma_0$ gilt. Bei nichtebener Belastung kann sich Y_I entlang der Rissfront ändern. Für viele Geometrie- und Belastungsfälle wurde Y_I als Funktion von Risslänge und Bauteilabmessung berechnet und kann in Handbüchern, zum Beispiel [Mur87] oder [The87], nachgelesen werden.

4.5.3 LEBM, Kleinbereichsfließen und EPBM

Das linear-elastische Materialverhalten an der Rissspitze ist eine idealisierte Modellvorstellung der LEBM. Auch bei makroskopisch sprödem Bruchverhalten treten an der Rissspitze irreversible Verformungen in der sogenannten Prozesszone auf. Bei elastisch-plastischen Werkstoffen kommt es zur Ausbildung einer plastischen Zone und zum Abstumpfen der

Rissspitze. Zunächst wird die Plastifizierung an der Rissspitze durch die Spannungen der sie umgebenden K -dominierten elastischen Region kontrolliert. Solange der plastisch verformte Bereich klein im Vergleich zum K -dominierten Gebiet bleibt, kann das Konzept der LEBM auch auf duktile Werkstoffe angewendet werden. Man spricht dann von Kleinbereichsfließen (*small scale yielding*). Als obere Grenze für den Gültigkeitsbereich der LEBM wird eine Ausdehnung der plastischen Zone von $r_{\text{pl}} = 0,025a$ angenommen [Blu93]. Mit Hilfe der elastischen Lösung (4.102) kann die Größe und Form der plastischen Zone abgeschätzt werden, wenn vereinfacht ideal-plastisches Fließen mit der Anfangsfließspannung σ_{F0} angenommen wird [Säh93, Kun10]. Setzt man (4.102) in die Fließbedingung nach v. MISES ein und stellt diese um, erhält man den Radius der plastischen Zone bei Modus-I-Belastung als Funktion der Polarwinkel θ :

$$r_{\text{pl}} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_{\text{I}}}{\sigma_{\text{F0}}} \right)^2 \cos^2(\theta/2) \begin{cases} 3 \sin^2(\theta/2) + 1 & \text{für den ESZ} \\ 3 \sin^2(\theta/2) + (1 - 2\nu)^2 & \text{für den EVZ} \end{cases} \quad (4.106)$$

Die Ausdehnung der plastischen Zone ist demnach für den EVZ kleiner als für den ESZ und hängt zusätzlich von der Querkontraktionszahl ab. Die Behinderung der Querdehnung im Inneren von dicken Bauteilen bewirkt einen höheren hydrostatischen und einen geringeren deviatorischen Spannungsanteil als an der Bauteiloberfläche oder bei dünnen Bauteilen.

Um das plastische Fließen im Bruchkriterium (4.105) zu berücksichtigen, führte IRWIN eine Risslängenkorrektur ein. Die effektive Risslänge a_{eff} wird erhalten, indem die Risslänge a um den Radius der plastischen Zone im Ligament $r_{\text{pl}}(\theta = 0)$ verlängert wird [Gro07]:

$$a_{\text{eff}} = a + r_{\text{pl}}(\theta = 0). \quad (4.107)$$

Im Bereich $0 < r \leq r_{\text{pl}}$ nimmt die Spannung σ_{22} den Wert der Fließgrenze σ_{F0} an. Den Radius der plastischen Zone im Ligament erhält man aus Gl. (4.106):

$$r_{\text{pl}}(\theta = 0) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_{\text{I}}}{\sigma_{\text{F0}}} \right)^2 \begin{cases} 1 & \text{für den ESZ} \\ (1 - 2\nu)^2 & \text{für den EVZ} \end{cases} \quad (4.108)$$

Im Bruchmechanikexperiment macht sich der Übergang von der LEBM über Kleinbereichsfließen bis zum vollplastischen Fließen erst bemerkbar, wenn der Gültigkeitsbereich des Kleinbereichsfließens überschritten wurde. Die globale Kraft-Verformungs-Kurve weicht dann von der Geraden ab und Methoden der EPBM (auch Fließbruchmechanik) müssen zur Anwendung kommen. Weil dann analytische Lösungen der Randwertaufgabe nur für sehr einfache ebene Modelle bei monotoner Belastung möglich sind, müssen numerische Methoden wie die FEM angewandt werden. Eines der wichtigsten Konzepte, welches sich sehr gut für die numerische Auswertung eignet, ist das J -Integral-Konzept.

4.5.4 Das J -Integral

Das J -Integral wurde von CHEREPANOV [Che67] und RICE [Ric68] unabhängig voneinander eingeführt. Es charakterisiert die bei Rissfortschritt frei werdende Energie und kann sowohl in der LEBM als auch in der EPBM erfolgreich eingesetzt werden. Das J -Integral ist definiert als ebenes Linienintegral mit geschlossenem Integrationsweg Γ um die Risspitze (siehe Abb. 4.7), der das untere mit dem obere Rissufer verbindet:

$$J = \int_{\Gamma} \left(w \, dx_2 - t_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds \right) \quad (4.109)$$

Es gehen die Formänderungsenergiedichte w , der nach außen gerichtete Schnittspannungsvektor t_i und die Ableitung des Verschiebungsvektor u_i längs des Integrationsweges (Wegelement $ds = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2}$) ein. w kann für linear-elastisches Materialverhalten mit

$$w = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (4.110)$$

angegeben werden. In der EPBM muss das Integral über der Belastungsgeschichte

$$w = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} \, d\varepsilon_{ij} \quad (4.111)$$

berechnet werden. In einem rissfreien Gebiet, das von der Kontur Γ vollständig umschlossen ist (oder bei geschlossenem Riss), verschwindet das J -Integral. Außerdem besitzt es die vorteilhafte Eigenschaft, dass sein Wert unabhängig vom gewählten Integrationsweg ist. Dadurch kann bei seiner Berechnung ein Integrationspfad gewählt werden, der nicht durch das aufwendig zu berechnende Nahfeld der Risspitze gelegt werden muss, sondern in weiterer Entfernung davon verläuft. Dies vereinfacht die numerische Berechnung mit der FEM, weil die Rissspitzenumgebung grob diskretisiert und auf die Verwendung spezieller Rissspitzenelemente zur Abbildung der Singularität verzichtet werden kann ohne Genauigkeitseinbußen hinzunehmen.

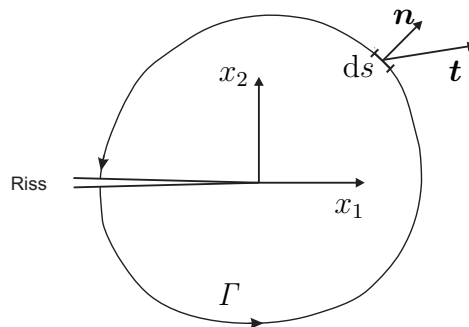


Abbildung 4.7: Definition des wegunabhängigen J -Integrals als Linienintegral um die Risspitze

Der J -Integral-Wert ist für elastisches Materialverhalten identisch mit der Energiefreisetzungsrate \mathcal{G} . In der LEBM kann J in Beziehung zu den Spannungsintensitätsfaktoren gesetzt werden. Es gilt [Gro07]:

$$J = \frac{1}{E'} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{2G} K_{III}^2 \quad (4.112)$$

mit

$$E' = \begin{cases} E & \text{für den ESZ} \\ \frac{E}{1 - \nu^2} & \text{für den EVZ} \end{cases} \quad (4.113)$$

Für eine reine Modus-I-Belastung kann K_I daher durch das J -Integral und die elastischen Konstanten ausgedrückt werden:

$$K_I = \sqrt{J E'} \quad (4.114)$$

Demzufolge lässt sich ein Sprödbbruchkriterium gleichberechtigt mit dem kritischen Spannungsintensitätsfaktor K_{Ic} oder mit der kritischen Energiefreisetzungsrate J_c formulieren. In der LEBM hat sich jedoch das Spannungsintensitätskonzept stärker durchgesetzt, da K proportional der anliegenden Nennspannung ist und K_c den Widerstand gegen Rissausbreitung unabhängig von den elastischen Konstanten des Werkstoffs beschreibt.

4.5.5 FEM-Techniken zur Analyse von Rissen

Für die Auswertung der Spannungs- und Verschiebungsfelder an Rissen mit Hilfe der FEM sind verschiedene Methoden bekannt, einen sehr guten Überblick und eine ausführliche Beschreibung der einzelnen Methoden liefert KUNA [Kun10]. In dieser Arbeit spielt nur die Berechnung von Bruchmechanikproben aus Stahl und von Keramikproben mit halbeliptischen Oberflächenrissen unter Modus-I-Belastung eine Rolle. Es wird eine Auswahl geeigneter Methoden vorgestellt, die mit kommerzieller FEM-Software realisierbar sind.

Direkte Auswertemethode

Die simpelste aber ungenaueste Methode besteht darin, das FE-Netz in Richtung zur Rissspitze zu verfeinern und so die Risssingularität immer feiner aufzulösen. Aus den numerisch berechneten Spannungs- oder Verschiebungswerten kann mit Gl. (4.102) oder (4.103) für unterschiedliche Entfernungen von der Rissspitze der Spannungsintensitätsfaktor berechnet und auf $r \rightarrow 0$ extrapoliert werden. Diese Vorgehensweise nennt sich direkte Verschiebungsauswertemethode bzw. direkte Spannungsauswertemethode.

Modifizierte isoparametrische Elemente

Wesentlich effektiver ist die Anordnung modifizierter isoparametrischer Elemente in Form eines Fächers um die Riss Spitze. Zunächst wird nur der ebene Fall betrachtet. Bei linear-elastischem Material werden sogenannte Viertelpunktelemente verwendet, die aus isoparametrischen³ Elementen mit quadratischem Verschiebungsansatz hervorgehen. Indem die Seitenmittelnknoten der mit der Riss Spitze verbundenen Kanten um eine viertel Kantenlänge zur Riss Spitze verschoben werden, wird die $1/\sqrt{r}$ -Singolarität erreicht. Am häufigsten findet das 8-Knoten-Viereckelement Verwendung, bei dem eine Seite zu einem Punkt kollabiert ist, wie es Abb. 4.8(a) zeigt. Das zu einem Dreieck degenerierte Viereckelement besitzt drei Knoten mit identischen Koordinaten, die auf der Riss Spitze liegen und sich nur gemeinsam bewegen können. Bei elastisch-plastischem Materialverhalten werden die Seitenmittelnknoten nicht verschoben und die Riss spitzenknoten können sich unabhängig voneinander verschieben, was Abb. 4.8(b) zeigt. Auf diese Weise wird eine $1/r$ -Singolarität modelliert. Die modifizierten Elemente werden in beiden Fällen über die unveränderte vierte Seite mit regulären Elementen gekoppelt. Da diese Elemente nur die radiale Singularität abbilden, muss die Winkelabhängigkeit durch die fächerförmige Elementanordnung um die Riss Spitze modelliert werden. Wenigstens sechs, besser mehr Elemente über dem Halbkreis sind für eine ausreichende Auflösung erforderlich [Kun10]. Da der Gültigkeitsbereich der Nahfeldlösung begrenzt ist, muss weiterhin die radiale Kantenlänge L der Viertelpunktelemente klein gegenüber der Risslänge bleiben. Als Richtwert gilt $L \approx a/20 \dots a/10$ [Kun10]. Die entsprechende Modifikation ist auch bei dreidimensionalen quadratischen Elementen möglich, indem eine Seitenfläche eines Hexaeders zu einer Kante kollabiert wird, die auf der Rissfront liegt. Die Vernetzungsregeln sind analog zu den ebenen Riss spitzen Elementen.

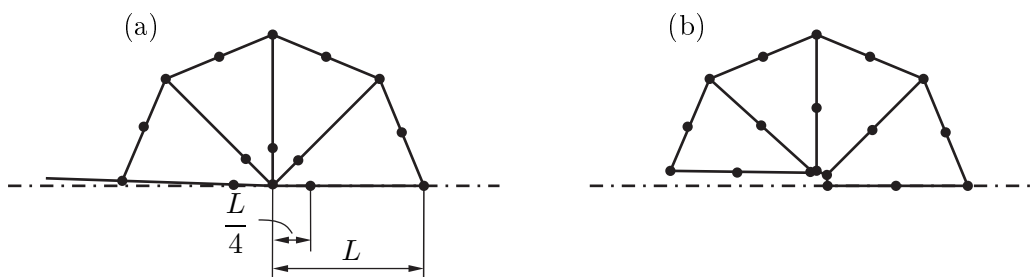


Abbildung 4.8: Modellierung der Riss Spitze mit kollabierten isoparametrischen Elementen. (a) elastisch: Seitenmittelnknoten zur Viertelposition verschoben, Riss spitzenknoten gekoppelt, (b) elastisch-plastisch: Knoten auf Mittelposition, Riss spitzenknoten unabhängig verschiebbar

Die Spannungsintensitätsfaktoren können bei linear-elastischem Material durch Auswertung der Knotenverschiebungen auf den Rissufern berechnet werden. Für ebene und räumliche Viertelpunktelemente existieren bereits fertige Auswerteformeln [Kun10], sie lauten

³Elementgeometrie und Verschiebungen werden mit den gleichen Formfunktionen beschrieben.

bei symmetrischer Modus-I-Belastung (Riss in Symmetrieebene, $u_2^A = u_2^H = u_2^G = 0$):

$$K_I = \frac{E'}{4} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} [4u_2^B - u_2^C], \quad (4.115)$$

$$K_I(\xi_3) = \frac{E'}{4} \sqrt{\frac{2\pi}{L'}} [2u_2^B - u_2^C + 2u_2^E - u_2^F + u_2^D + \frac{1}{2}\xi_3 (-4u_2^B + u_2^C + 4u_2^E - u_2^F) + \frac{1}{2}\xi_3^2 (u_2^F + u_2^C - 2u_2^D)] . \quad (4.116)$$

Aus Abbildung 4.9 sind die Knotenbezeichnungen für die Auswerteformeln ersichtlich.

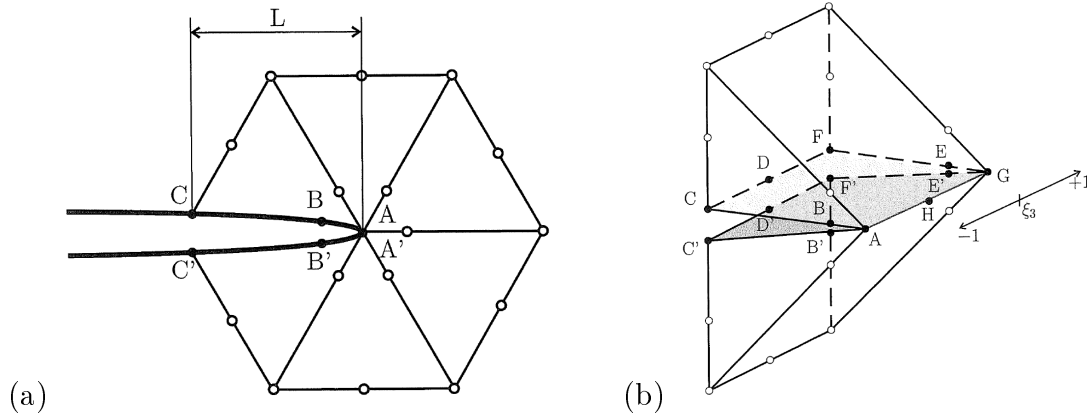


Abbildung 4.9: Knoten für Verschiebungsauswertung zur Berechnung des Spannungsintensitätsfaktors bei (a) 2D-Viertelpunktelementen, (b) 3D-Viertelpunktelementen (Bilder aus [Kun10])

Konturintegralberechnung

Wenn die Berechnung des Spannungsfeldes an der Risspitze nicht erforderlich ist, sondern lediglich die globale Rissbeanspruchung interessiert, kann die numerische Berechnung von K_I am effektivsten mit Hilfe des wegunabhängigen J -Integrals erfolgen, dessen Berechnung in kommerziellen FE-Programmen wie ABAQUS bereits implementiert ist. Wählt man einen Pfad (eine Kontur) um die Risspitze, der außerhalb des K -dominierten Feldes liegt, werden auch keine speziellen Risspitzenelemente benötigt, die Rissvernetzung kann mit regulären Elementen erfolgen. In der LEBM kann J nach Gl. (4.114) in ein äquivalentes K_I umgerechnet werden. Bei der Umrechnung muss folgendes beachtet werden: J in N/mm und E' in MPa liefert $K_I = \sqrt{0,001J \cdot E'}$ in $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$. Auch bei elastisch-plastischem Material und Kleinbereichsfließen kann diese Umrechnung ohne Genauigkeitseinbußen erfolgen, indem der Pfad um die Risspitze so gelegt wird, dass er ausschließlich im elastischen Bereich verläuft. Bei räumlichen Rissproblemen muss zusätzlich beachtet werden, dass die Kontur für einen Punkt der Rissfront in einer Ebene senkrecht zur Rissfront verläuft. Durch entsprechende Restriktionen bei der Vernetzung kann dies sichergestellt werden, häufig wird eine schlauchförmige Vernetzung entlang der Rissfront verwendet.

4.6 Probabilistische Spröbruchmodelle

Bei spröde versagenden Werkstoffen wird eine zufällige Streuung der Bruchfestigkeit beobachtet. Zusätzlich tritt das Phänomen auf, dass mit zunehmendem Bauteilvolumen die mittlere Bruchfestigkeit sinkt. Eine mathematische Beschreibung und Interpretation dieser beiden Beobachtungen lieferte 1939 erstmals WEIBULL [Wei39] mit seiner Weakest-Link-Theorie. Als einfachsten mathematischen Ansatz für die Beschreibung der Ausfallwahrscheinlichkeit P_f schlug er die dreiparametrische Verteilungsfunktion⁴ [Wei51]

$$P_f = P(X \leq x) = F(x) = 1 - \exp \left(- \left(\frac{x - x_u}{x_0} \right)^m \right) \quad (4.117)$$

mit den Parametern m , x_0 und x_u vor, die schließlich nach ihm benannt wurde. Die breite Anwendbarkeit als empirische Verteilungsfunktion belegte er selbst mit zahlreichen Beispielen [Wei39, Wei51]. Die heutzutage verwendeten probabilistischen Spröbruchmodelle für verschiedene Werkstoffe sind im Grunde nur Erweiterungen der Weakest-Link-Theorie und behalten die mathematische Form der Weibull-Verteilung bei, obwohl auch andere Verteilungen denkbar sind (siehe Anhang A.1.2).

4.6.1 Weakest-Link-Theorie und Weibull-Verteilung der Festigkeit

Der empirische Ansatz von WEIBULL erklärt die Streuung und Größenabhängigkeit der Festigkeit mit einer Analogie zum schwächsten Glied („*weakest link*“) einer Kette. Die Festigkeit eines einzelnen Kettengliedes sei zufällig verteilt mit der Versagenswahrscheinlichkeit P_i . Eine Kette aus n Gliedern versagt nun mit der Wahrscheinlichkeit P_f , wenn eines ihrer Kettenglieder versagt. Die Überlebenswahrscheinlichkeit der Kette $P_s = 1 - P_f$ ergibt sich durch Multiplikation der Überlebenswahrscheinlichkeiten aller Kettenglieder:

$$P_s = \prod_{i=1}^n (1 - P_i). \quad (4.118)$$

Mit jedem zusätzlichen Kettenglied wird daher die Überlebenswahrscheinlichkeit kleiner und die Ausfallwahrscheinlichkeit entsprechend größer. Das Weakest-Link-Prinzip lässt sich nun analog auf das Versagen von Festkörpern anwenden, wenn man sich deren Volumen in mehrere Volumenelemente unterteilt vorstellt und das Versagen eines Volumenelementes für das Versagen des gesamten Körpers verantwortlich sei. Umso größer ein

⁴In der Wahrscheinlichkeitstheorie (siehe Anhang A.1.1) wird die Ausfallwahrscheinlichkeit $P_f(x) = P(X \leq x)$ als Wahrscheinlichkeit interpretiert, dass eine Zufallsgröße X (hier die Festigkeit) den Wert x (ein Zahlenwert der Festigkeit) nicht überschreitet und als kumulative Verteilungsfunktion $F(x)$ geschrieben. Dazu komplementär ist die Überlebenswahrscheinlichkeit $P_s(x) = P(X > x) = 1 - P_f(x)$.

Bauteil ist, desto größer ist seine Ausfallwahrscheinlichkeit. Hierbei spielt es keine Rolle, ob die Volumenelemente in Reihe oder parallel angeordnet sind [Wei39]. Die Bauteilgröße kann durch das Volumen oder die Oberfläche ausgedrückt werden. Wenn in der weiteren Betrachtung nur von der Volumenabhängigkeit der Festigkeit gesprochen wird, so gelte dies stellvertretend auch für die Abhängigkeit von der Oberfläche eines Bauteils, das Volumen V muss dann durch die Fläche A ersetzt werden. Eine allgemeine Herleitung für die Volumenabhängigkeit der Bruchwahrscheinlichkeit findet sich im Anhang A.1.2.

Als Ursache des Spröbruchversagens werden zufällig verteilte Defekte im Bauteil angesehen. Das empirische Modell von WEIBULL gibt allerdings keine Auskunft über die Natur und Verteilung der versagensauslösenden Defekte. Ein Blick in die Mikrostruktur der spröde versagenden Werkstoffe zeigt, dass mikroskopisch kleine Defekte im Volumen oder an der Oberfläche Ausgangspunkt des Bauteilversagens sind. Die Defekte sind zufällig verteilt und können mechanisch als Mikrorisse modelliert werden. Die Mikrorisse sind bei Keramikbauteilen als Folge des Herstellungsprozesses von Anfang an im Material vorhanden [Mun99], bei ferritischen Stählen in der Tieflage der Zähigkeit entstehen sie erst während der Belastung als Folge mikroplastischer Deformationen [Ber83] (mehr dazu im Abschnitt 4.6.2 und 4.6.3). Über die bruchmechanische Beziehung (4.105) kann ein Zusammenhang zwischen der Defektgrößenverteilung im Material und der Festigkeitsverteilung des Bauteils hergestellt werden. Der gefährdetste Mikroriss im Spannungsfeld eines belasteten Bauteils, also derjenige, für den der Spannungsintensitätsfaktor als erstes die Bruchzähigkeit erreicht, ist für das spröde Versagen des ganzen Bauteils verantwortlich.

Da eine beliebige Wahrscheinlichkeitsverteilung immer in der Form $F(x) = 1 - \exp(-\phi(x))$ geschrieben werden kann, gilt für die Versagenswahrscheinlichkeit eines homogen mit der Zugspannung σ beanspruchten Volumens V ganz allgemein die Beziehung

$$P_f = 1 - \exp(-\phi(\sigma, V)) = 1 - P_s. \quad (4.119)$$

Die Funktion $\phi(\sigma, V)$ muss lediglich eine monoton steigende Funktion sein, die von 0 bis ∞ verläuft. Die Größenabhängigkeit der Festigkeit kann durch Abspaltung eines Faktors V/V_0 beschrieben werden, der das beanspruchte Volumen V ins Verhältnis zu einem Referenzvolumen V_0 setzt:

$$P_f(\sigma, V) = 1 - \exp\left(-\frac{V}{V_0}\phi(\sigma)\right). \quad (4.120)$$

In der Analogie zum schwächsten Glied einer Kette ist die Referenzgröße ein Kettenglied und V/V_0 drückt die Anzahl der Kettenglieder aus. V_0 kann im Prinzip frei gewählt werden, sollte allerdings ein repräsentatives Volumen beschreiben, in dem die Weakest-Link-Annahme Gültigkeit besitzt. Ein größeres V führt zu einer größeren Ausfallwahr-

scheinlichkeit. Für $\phi(\sigma)$ führte WEIBULL den dreiparametrischen empirischen Ansatz

$$\phi(\sigma) = \left(\frac{\sigma - \sigma_{\min}}{\sigma_0} \right)^m \quad (4.121)$$

ein, wobei σ_{\min} eine untere Festigkeitsgrenze darstellt, unterhalb der kein Versagen auftritt. Die dreiparametrische Weibull-Verteilung der Festigkeit lautet demzufolge

$$P_f(\sigma, V) = \begin{cases} 1 - \exp \left[-\frac{V}{V_0} \left(\frac{\sigma - \sigma_{\min}}{\sigma_0} \right)^m \right] & , \sigma > \sigma_{\min} \\ 0 & , \sigma \leq \sigma_{\min} \end{cases} \quad (4.122)$$

Der Weibull-Modul m charakterisiert die Streuung der Festigkeit und indirekt deren Volumensabhängigkeit. Je kleiner m , desto größer ist die Streuung und die Größenabhängigkeit. Der Grenzübergang $m \rightarrow \infty$ führt auf den Grenzfall der Festigkeit ohne Streuung. Dann macht die Wahrscheinlichkeitsverteilung bei σ_0 einen Sprung von 0 auf 1. σ_0 als Lageparameter der Verteilung kennzeichnet einen charakteristischen Festigkeitswert, bei dem die Ausfallwahrscheinlichkeit 63,2% beträgt, wenn $V = V_0$ gilt. Die Festigkeitsuntergrenze σ_{\min} wird häufig aus Vereinfachungsgründen zu Null gesetzt, zumal sie meist nicht genau angegeben werden kann. Für diesen Sonderfall $\sigma_{\min} = 0$ ergibt sich die einfachere zu handhabende und daher häufig verwendete zweiparametrische Weibull-Verteilung. Allerdings muss erwähnt werden, dass der Parameter σ_{\min} die Form der Weibull-Verteilung, insbesondere bei kleiner Ausfallwahrscheinlichkeit, beeinflusst. Die Vernachlässigung des Festigkeitsschwellwertes führt zu einem scheinbar höheren Weibull-Modul.

Damit für einen einachsigen Zugstab des Volumens V , der homogen mit der Zugspannung σ beansprucht wird, stets die gleiche Ausfallwahrscheinlichkeit erhalten wird, muss in Gl. (4.122)

$$V_0 \sigma_0^m = C_0 \quad (4.123)$$

mit der materialspezifischen Konstante C_0 gelten. V_0 und σ_0 sind Normierungsgrößen, die zwar variabel, jedoch nicht unabhängig voneinander gewählt werden können. σ_0 stellt die charakteristische Festigkeit des homogen auf Zug beanspruchten Volumens V_0 dar.

Soll die Sprödbruchwahrscheinlichkeit eines inhomogen belasteten Bauteils für einen allgemeinen dreiachsigen Spannungszustand berechnet werden, so sind materialspezifische Modelle erforderlich, die auf die mikroskopischen Sprödbruchmechanismen eingehen. Die folgenden Unterabschnitte 4.6.2 und 4.6.3 beschreiben die unterschiedlichen Sprödbruchkonzepte für Keramik und ferritische Stähle. Die Schätzung der Weibull-Parameter anhand einer Stichprobe von N Beanspruchungswerten (x_1, \dots, x_N) erfolgt aber wieder mit dem gleichen statistischen Schätzverfahren, der Maximum-Likelihood-Methode, die im Abschnitt 4.6.4 erklärt wird.

4.6.2 Spröbruchmodell für Keramik

In Keramikbauteilen entstehen zahlreiche Mikrorisse während des Sintervorganges (Volumenfehler) und bei der anschließenden Hartbearbeitung (Oberflächenfehler). Die Theorie zur Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit keramischer Bauteile unter mehrachsiger Belastung basiert auf den folgenden Annahmen [Mun99]:

- Im Bauteil existieren Fehler, die bruchmechanisch als ebene Risse beschreibbar sind.
- Der Werkstoff ist isotrop, die im Bauteil existierenden Risse sind gleichverteilt.
- Die Risse beeinflussen sich gegenseitig nicht.
- Größe und Orientierung der Risse sind zufällig.
- Die Größenverteilung der bruchauslösenden Risse kann mit einem Potenzgesetz der Form $f(a) = \alpha/a^r$ (Pareto-Verteilung) angenähert werden.
- Der „weakest link“, das heißt die ungünstigste Kombination von Rissgröße, -lage und -orientierung im Spannungsfeld bestimmt das Bauteilversagen.

Wenn die Rissgrößenverteilung einer Pareto-Verteilung folgt, ergibt sich mit der bruchmechanischen Beziehung (4.105) für den GRIFFITH-Riss nach mehreren Umformschritten eine zweiparametrische Weibull-Verteilung der Festigkeit. Die Theorie führt schließlich auf folgenden Ausdruck für die akkumulierte Ausfallwahrscheinlichkeit eines mehrachsig belasteten Bauteiles [Bat74, Thi89, Heg93]:

$$P_f = 1 - \exp \left[-\frac{1}{V_0} \int_V \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \left(\frac{\sigma_{eq}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})}{\sigma_0} \right)^m d\Omega dV \right]. \quad (4.124)$$

Zwischen dem Weibull-Modul m und dem Exponenten des Potenzgesetzes r besteht die Beziehung

$$m = 2(r - 1). \quad (4.125)$$

σ_{eq} ist die zur Modus-I-Beanspruchung eines Risses äquivalente Spannung, die unter Verwendung eines geeigneten Mehrachsigsigkeitskriteriums berechnet wird. Sie hängt vom lokalen Wert des Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ und der Orientierung $\boldsymbol{\omega}$ des Risses ab. Die Integration erfolgt über alle möglichen Raumwinkel Ω und über das Bauteilvolumen V . Für das Referenzvolumen gilt normalerweise $V_0 = 1 \text{ mm}^3$. σ_0 wird als wahrer Weibull-Parameter bezeichnet, in dem die Größenabhängigkeit bereits eliminiert wurde, er wird auch durch die Wahl des Mehrachsigsigkeitskriteriums beeinflusst. m ist jedoch unabhängig vom Mehrachsigsigkeitskriterium und geht allein auf die Fehlergrößenverteilung zurück.

Bei einem homogen und einachsig auf Zug beanspruchten Volumen V_0 entspricht σ_0 der Zugspannung, die mit 63,2%-iger Wahrscheinlichkeit zum Versagen führt.

Die Übertragung experimenteller Ergebnisse (meist einachsige oder zweiachsige Biegeversuche) auf beliebige Probengeometrien und Spannungszustände setzt die Wahl eines geeigneten Mehrachsigenkriteriums voraus. Es sind zahlreiche lokale und globale Kriterien aus der Literatur bekannt, siehe [Bat74, Thi89, Heg93, Jak96, Krü99], jedoch besteht bisher kein Konsens, welches die beste Wahl darstellt [Dan08]. Unter der Annahme, dass im Bauteilvolumen alle Rissorientierungen gleichwahrscheinlich sind, werden in dieser Arbeit nur zwei globale Kriterien zur Anwendung kommen, die vergleichsweise einfach zu handhaben sind. Das Kriterium der maximalen Hauptspannung („First Principal Stress criterion“, FPS) und das Prinzip der unabhängig voneinander wirkenden Hauptspannungen („Principle of Independent Action“, PIA) führen auf folgende Äquivalentenspannungen:

$$\sigma_{\text{eq}}^{\text{FPS}} = \langle \sigma_1 \rangle \quad (4.126)$$

$$\sigma_{\text{eq}}^{\text{PIA}} = \sqrt[m]{\langle \sigma_1 \rangle^m + \langle \sigma_2 \rangle^m + \langle \sigma_3 \rangle^m}. \quad (4.127)$$

σ_1 , σ_2 und σ_3 sind die drei Hauptspannungen des CAUCHYSchen Spannungstensors. Die FÖPPL-Klammer⁵ $\langle \dots \rangle$ bedeutet, es gehen nur positive Werte (Zugspannungen) in die Berechnung ein, bei negativen Hauptspannungen (Druckspannungen) werden diese zu Null gesetzt. Die Integration muss nur über das Volumen erfolgen, die Abhängigkeit von der Rissorientierung entfällt. Das PIA-Modell [Fre68] findet zum Beispiel erfolgreich Anwendung in der Forschergruppe um DANZER⁶ [Bör02, Bör04, Dan08].

Mit der formalen Erweiterung von Gl. (4.124) um eine charakteristische Bezugsspannung σ_c , die zum Beispiel die maximale Randfaserspannung bei Biegung sein kann, ist es möglich, ein effektiv beanspruchtes Volumen

$$V_{\text{eff}} = \int_V \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \left(\frac{\sigma_{\text{eq}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})}{\sigma_c} \right)^m d\Omega dV \quad (4.128)$$

zu definieren, welches von m und dem gewählten Mehrachsigenkriterium abhängt. Für das Hauptnormalspannungs- und das PIA-Kriterium vereinfacht sich die Berechnung:

$$V_{\text{eff}} = \int_V \left(\frac{\sigma_{\text{eq}}(\mathbf{x})}{\sigma_c} \right)^m dV. \quad (4.129)$$

Mit Hilfe von V_{eff} können Proben beziehungsweise Bauteile mit inhomogener Beanspruchung auf das äquivalente Volumen unter einachsiger homogener Zugbelastung mit gleicher

⁵im englischen Sprachgebrauch „Macaulay bracket“, $\langle x \rangle = (|x| + x) / 2$

⁶Institut für Struktur- und Funktionskeramik (ISFK), Montanuniversität Leoben

Ausfallwahrscheinlichkeit umgerechnet werden. Für das homogen belastete Volumen im einachsigen Zugversuch gilt also $V_{\text{eff}} = V$. Auf diese Weise wird es möglich, die Festigkeit unterschiedlicher Bauteile unter Berücksichtigung des Größeneffektes der Festigkeit miteinander zu vergleichen. Die Überprüfung eines mehrachsigen Bruchkriteriums und der Volumenabhängigkeit der Festigkeit erfordert experimentelle Ergebnisse mit unterschiedlichen Spannungszuständen und Probengrößen. Am geeignetsten ist dasjenige Kriterium, welches die beste Übertragbarkeit von einer Probenform auf die andere gewährleistet. Dies kann am besten in einem Diagramm veranschaulicht werden bei dem die charakteristische Probenfestigkeit über dem effektiven Volumen doppeltlogarithmisch aufgetragen wird [Dan08]. In der Theorie müssten die Datenpunkte für unterschiedliche Experimente auf einer Geraden mit dem Anstieg $1/m$ liegen.

Bei proportionaler äußerer Belastung erfolgt in einer Keramikprobe aufgrund des linear-elastischen Materialverhaltens keine Spannungsumlagerung, der Quotient $\sigma_{\text{eq}}/\sigma_c$ bleibt also bei einer Belastungsänderung konstant und V_{eff} ist unabhängig von der Belastungshöhe. Das effektive Volumen muss demzufolge bei bekanntem m nur einmal bei einer gewählten Belastungshöhe ausgerechnet werden und ist dann für andere Belastungshöhen gleichermaßen gültig. (Anders ist das im Bereich von Kontaktbelastungen eines Bauteiles, dort erfolgt eine Spannungsumlagerung, also eine nichtproportionale Belastung.) Wenn bei inhomogener Spannungsverteilung für die Bezugsspannung σ_c der Ort maximaler Spannung in einem Bauteil gewählt wird, so ist V_{eff} stets kleiner als das tatsächlich beanspruchte Bauteilvolumen V . Gl. (4.124) lässt sich nun in bekannter Weakest-Link-Form (4.120) schreiben:

$$P_f(\sigma_c, V_{\text{eff}}) = 1 - \exp \left[-\frac{V_{\text{eff}}}{V_0} \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_0} \right)^m \right]. \quad (4.130)$$

Daraus ergibt sich schließlich die experimentelle Festigkeitsverteilung

$$P_f(\sigma_c) = 1 - \exp \left[-\left(\frac{\sigma_c}{b} \right)^m \right], \quad (4.131)$$

welche die vertraute Form der zweiparametrischen Weibull-Verteilung mit den Parametern m und b aufweist. Der wahre Weibull-Parameter σ_0 und der direkt aus der experimentellen Festigkeitsverteilung gewonnene Parameter b hängen folgendermaßen zusammen:

$$\left(\frac{\sigma_0}{b} \right)^m = \frac{V_{\text{eff}}}{V_0}. \quad (4.132)$$

Deshalb ist es unabhängig von der Bauteilgeometrie und dem Spannungszustand möglich, den Weibull-Modul auf einfache Weise aus der experimentellen Bruchfestigkeitsverteilung nach Gleichung (4.131) zu bestimmen, wenn die zu Beginn des Abschnitts genannten Modellannahmen erfüllt sind. Im Grunde kann für die Bestimmung der Weibull-Parameter

m und b eine beliebige Probengeometrie verwendet werden, wenn das Spannungsfeld in der Probe bekannt ist und festigkeitsbeeinflussende Fehler (Kantendefekte, Formabweichungen, Schleifriefen) vernachlässigbar klein sind. Während man früher auf sehr einfache Probenformen und -belastungen (3-Punkt-Biegeversuch, 4-Punkt-Biegeversuch, Doppelringversuch) angewiesen war, um die Spannungen und das effektive Volumen analytisch berechnen zu können, besteht in der Gegenwart diese Einschränkung dank der Verfügbarkeit von FEM-Software nicht mehr. Damit ist die linearelastische Spannungsanalyse für beliebige Geometrien sehr einfach numerisch durchführbar. Erhöhter Aufwand besteht allerdings bei der Identifikation der Weibull-Parameter mit der Maximum-Likelihood-Methode und der anschließenden Berechnung des effektiven Volumens (4.129). Dafür gibt es kommerzielle Lösungen, die als FEM-Postprocessor arbeiten und eine statistische Auswertung durchführen, zum Beispiel das Programm STAU [Rie08] der Universität Karlsruhe oder das Programm CARES der NASA [Nem90]. Weil jedoch alle erforderlichen Bestimmungsgleichungen für die probabilistische Auswertung bekannt sind, wird in dieser Arbeit die Programmierung und Verwendung einer eigenen Auswerteroutine bevorzugt.

Ein praktisches Problem besteht bei der Anpassung der Weibull-Parameter an die gemessene Festigkeitsverteilung. Übliche Stichprobenumfänge $N \leq 30$ sind aus statistischer Sicht zu klein, um verlässliche Aussagen zu treffen. Es können dann fast immer Weibull-Parameter gefittet werden, auch wenn die tatsächliche Festigkeitsverteilung nicht weibullverteilt sein sollte [Dan07]. Zum Beispiel ist eine Unterscheidung zwischen einer Weibull-Verteilung mit zwei oder drei Parametern oder einer Normalverteilung bei kleinem N praktisch nicht möglich, dazu wäre eine viel größere Zahl von Versuchen notwendig [Dor83, Lu02, Lu02a, Dan07]. Die etablierten probabilistischen Sprödbruchmodelle setzen jedoch a priori eine Weibull-Verteilung voraus.

4.6.3 Sprödbruchmodell für ferritische Stähle

Ferritische Stähle versagen in der Zähigkeitstieflage und im spröd-duktilen Übergangsbereich aufgrund transkristallinem oder interkristallinem Spaltbruch. Als Ursache des Sprödbruchversagens werden statistisch verteilte Materialfehler angesehen. Einhergehend mit der deutlich verminderten Bruchzähigkeit gegenüber dem duktilen Bruch wird eine große Streuung der Bruchzähigkeit beobachtet. Außerdem sind die an Bruchmechanikproben ermittelten Zähigkeitswerte nicht unabhängig von der Probengröße [Ber83], es wird ein Größeneffekt analog dem von Keramikproben beobachtet, der mit dem Weakest-Link-Konzept erklärt wird. Interessanterweise neigen große Proben eher zu Sprödbruch als kleine, weshalb Experimente mit kleinen Proben ein duktiles Versagensverhalten aufweisen können, also Schadenstoleranz des Werkstoffs vermuten lassen, während deutlich größere Bauteile ohne Vorwarnung spröde versagen.

Lokales Bruchkonzept (Local Approach to Fracture) - BEREMIN-Modell

1983 veröffentlichte die französische Autorengruppe BEREMIN [Ber83] ein Spaltbruchmodell für Bauteile aus ferritischen Stählen, welches auch unter dem Begriff „Local Approach to Cleavage Fracture“ [Mud87, Bes04] bekannt ist. Die Annahmen beziehungsweise Vereinfachungen, die in diesem Modell stecken, werden von MUDRY [Mud87] (ein Mitglied der Autorengruppe) ausführlich dargelegt. Die drei grundlegenden Annahmen sind:

- **Mikrorissentstehung:** Während der Bauteilbelastung entstehen Mikrorisse durch verschiedene Mechanismen, die mit plastischen Deformationen des Materials verbunden sind. Deshalb werden nur Volumenelemente aus plastifizierten Bereichen der Struktur in die spätere Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit einbezogen.
- **Spaltbruchkriterium:** Es gelte das GRIFFITHSche Bruch-Kriterium. Versagen tritt ein, wenn die Normalspannung am Riss einen kritischen Wert erreicht. Dieser ist umgekehrt proportional zur Wurzel der Länge des versagensauslösenden Mikrorisses.
- **Weakest-Link-Annahme:** Versagen der ganzen Struktur tritt ein, wenn einer der Mikrorisse, der gefährdetste, instabil wird.

Die Autoren nehmen für die Mikrorisslänge l_0 in der plastischen Zone eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Form $f(l_0) = \alpha/l_0^\beta$ (Pareto-Verteilung) an. Unter Verwendung des GRIFFITH-Kriteriums für die kritische Spaltbruchspannung und der Weakest-Link-Annahme für den Spröbruch gelangen sie schließlich zu einer zweiparametrischen Weibull-Verteilung der Versagenswahrscheinlichkeit einer Probe unter Einwirkung einer globalen Last L :

$$P_f(\sigma_W(L)) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{\sigma_W(L)}{\sigma_u} \right)^m \right]. \quad (4.133)$$

Die Zufallsvariable ist hier die Weibull-Spannung σ_W , die definiert ist als

$$\sigma_W(L) = \sqrt[m]{\frac{1}{V_0} \int_{V_{pl}} \langle \sigma_1(\mathbf{x}, L) \rangle^m dV}. \quad (4.134)$$

Sie dient als Maß für die Beanspruchung der Struktur und wird aus der Verteilung der maximalen Hauptspannung σ_1 in der plastischen Zone V_{pl} ermittelt. Das Modell beschreibt also die Ausfallwahrscheinlichkeit für eine beliebige Bauteilgeometrie mit Hilfe der skalaren Beanspruchungsgröße σ_W . Die beiden Parameter der Verteilung sind die Referenzspannung σ_u und der Weibull-Modul $m = 2\beta - 2$, sie werden als Materialkonstanten betrachtet. m repräsentiert somit die Rissgrößenverteilung in der plastischen Zone. Das Referenzvolumen V_0 ist als Skalierungsfaktor im Prinzip variabel wählbar, jedoch wird in [Ber83, Mud87] darauf hingewiesen, dass ein repräsentatives Volumenelement des Werkstoffes zu wählen

ist. Als Referenzvolumen werden Werte von $V_0 = 1 \text{ mm}^3$ [Rug96, Gao98, Gao99, Gao00, Gao05, Was06], $V_0 = 0,001 \text{ mm}^3$ [Ber97, Ber99, Pou04, Tan05] und $V_0 = 0,000125 \text{ mm}^3$ [Ber83] verwendet. Für ein plastifiziertes Volumen $V_{\text{pl}} = V_0$, das homogen auf Zug beansprucht wird, stimmt die Weibull-Spannung mit der maximalen Hauptspannung überein. Ein wesentliches Problem bei der Anwendung des Modells besteht darin, dass die Zufallsgröße σ_W vom Parameter m abhängt, der erst aus Messergebnissen bestimmt werden muss. Typische berichtete Werte für m schwanken sehr stark zwischen 10 und 50 [Gao98, Ber99]. Die Auswirkung auf die Weibull-Spannung wird zu einem späteren Zeitpunkt im Kapitel 8 untersucht.

Damit die Vergleichbarkeit der Ergebnisse aus dem SPT mit anderen Experimenten gewährleistet ist, muss die Auswertung bezüglich des gleichen Referenzvolumens erfolgen. Als Belastungsparameter L wird günstigerweise eine globale Messgröße aus dem Experiment gewählt. Im SPT bieten sich dafür die Stempelverschiebung u und die Stempelpkraft F an. Die Berechnung der maximalen Hauptspannungsverteilung und der Größe der plastischen Zone erfolgt in der Regel numerisch mit der FEM. Damit bei Entlastungsvorgängen infolge Spannungsumlagerungen die Ausfallwahrscheinlichkeit nicht sinkt, muss die in der Belastungsgeschichte maximal aufgetretene 1. Hauptspannung verwendet werden. Die Integration der Weibull-Spannung erfolgt numerisch durch Summation über die Anzahl n_{pl} aller plastifizierten Volumenelemente V_i mit der dort bis zum aktuellen Zeitpunkt t aufgetretenen maximalen Hauptnormalspannung σ_{1i} :

$$\sigma_W(L) = \sqrt[m]{\sum_{i=1}^{n_{\text{pl}}} \left\langle \max_{\tau \leq t} \{ \sigma_{1i}(L, \tau) \} \right\rangle^m \frac{V_i}{V_0}}. \quad (4.135)$$

Das mikromechanisch basierte BEREMIN-Modell und seine Erweiterungen haben seit seiner Einführung eine große Beachtung in Industrie und Forschung gefunden. Es kann als das verbreitetste Modell für die Vorhersage des Sprödbruchs von Stählen angesehen werden [Pou04, Pin06, Pin08]. Allerdings vermitteln die Begründer dieser Theorie ein vermeintlich einfaches Modell, was aber in Wirklichkeit hochgradig nichtlinear und hinsichtlich der Materialparameteridentifikation aufgrund der statistischen Festigkeitsstreuung ein schlecht gestelltes Problem ist. Die Weibull-Spannung hängt im Gegensatz zur Festigkeit von Keramikwerkstoffen von mehreren Modellfaktoren ab:

$$\sigma_W(L) = \sigma_W(\sigma_1(\mathbf{x}, L), V_{\text{pl}}(L), m, V_0) \quad (4.136)$$

Globales Bruchkonzept (Global Approach to Fracture)

Dem neueren lokalen Bruchkonzept für die Charakterisierung der Zuverlässigkeit riss-behafteter mechanischer Strukturen aus ferritischem Stahl steht das klassische globale Konzept der elastisch-plastischen Bruchmechanik gegenüber. Es beschreibt den Werkstoffwiderstand gegen Rissausbreitung mit den Rissspitzenparametern K oder J , die aus Experimenten mit Bruchmechanikproben stammen. Die Spröbruchversagenswahrscheinlichkeit von Bruchmechanikproben kann mit einer Weibull-Verteilung der Bruchzähigkeit K_{Jc} beschrieben werden [Wal84] (gültig für Kleinbereichsfließen):

$$P_f(K_{Jc}) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{K_{Jc} - K_{\min}}{K_0 - K_{\min}} \right)^{m_K} \right]. \quad (4.137)$$

In Experimenten mit Stählen zeigte sich wiederholt, dass eine Mindestbruchzähigkeit von circa $K_{\min} = 20$ MPa auftritt. Dieser Wert wurde schließlich 1998 für die Master-Curve-Methode in der ASTM-Norm E-1921 [AST02b] festgeschrieben. WALLIN [Wal84] zeigte theoretisch (unter der Annahme des Kleinbereichsfließens) und experimentell, dass für den Weibull-Modul $m_K = 4$ gilt. Die so ermittelte Bruchzähigkeit weist jedoch nicht nur eine statistische Streuung auf, sondern auch noch eine Abhängigkeit von der Probengröße. Größere Proben führen zu kleineren Bruchzähigkeitswerten, siehe auch [Ber83, Bes04]. Das globale Konzept allein kann diesen Effekt nicht erklären. Das veranlasste WALLIN zu der auf der Weakest-Link-Annahme beruhenden Dickenkorrektur [Wal85]

$$K_{JcB_0} = K_{\min} + (K_{Jc} - K_{\min}) \left(\frac{B}{B_0} \right)^{1/4} \quad (4.138)$$

mit der Probendicke B und der Referenzdicke B_0 .

Beziehung zwischen Bruchzähigkeit und Weibull-Spannung

Sowohl das globale als auch das lokale Konzept für ferritischen Stahl verfolgen das Ziel, die Spröbruchwahrscheinlichkeit mechanischer Strukturen zu bestimmen. Die Übertragung experimentell bestimmter Bruchzähigkeitswerte auf Bauteile anderer Größe und Geometrie wird erst durch das lokale bruchmechanische Konzept, das den Weakest-Link-Ansatz von WEIBULL [Wei39] widerspiegelt, möglich. Der Erfolg des BEREMIN-Modells basiert auf seiner Einfachheit in der Anwendung mit nur zwei Materialparametern m und σ_u , wobei der Weibull-Modul gemäß der Empfehlung in [Ber83] häufig vereinfacht mit $m = 22$ fixiert wird, also nur ein Parameter bestimmt werden muss. Allerdings argumentieren andere Autoren in Veröffentlichungen neueren Datums, dass die Annahmen im BEREMIN-Modell, welches schon bei sehr kleinen Lasten eine endliche Versagenswahrscheinlichkeit

vorhersagt, eine zu starke Vereinfachung darstellen [Kro02, Fal04, Bor05, Bor05a, Gao05, Ros11]. Außerdem ist die Übertragbarkeit der Parameter zwischen Festigkeitsversuchen und Bruchmechanikversuchen mit dem originalen BEREMIN-Modell praktisch nicht gewährleistet [Ber99]. Daher wurden diverse Erweiterungen vorgeschlagen, zum Beispiel von BERNAUER [Ber97, Ber99], die zusätzliche Einflussgrößen in das Modell einbauen, jedoch prinzipiell bei der zweiparametrischen Form der Weibull-Verteilung bleiben. Die Übertragbarkeit konnte dadurch nicht wesentlich verbessert werden. Das gelang erst mit Festhalten des Weibull-Moduls. Diese Idee wurde aber, wie bereits erwähnt, schon in [Ber83] vorgeschlagen. GAO et al. [Gao98] schlugen 1998 eine modifizierte dreiparametrische Form mit einer Untergrenze der Weibull-Spannung $\sigma_{W,\min}$ vor, die durch die Weibull-Verteilung der Bruchzähigkeit (4.137) motiviert ist:

$$P_f(\sigma_W) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{\sigma_W - \sigma_{W\min}}{\sigma_u - \sigma_{W\min}} \right)^m \right]. \quad (4.139)$$

Inzwischen hat sich diese dreiparametrische Form der Weibull-Verteilung anstelle der originalen zweiparametrischen Form des BEREMIN-Modells (4.133) verbreitet. Der simple Grund besteht darin, dass damit eine bessere Anpassung an experimentelle Daten erreichbar ist [Gao98, Rug01, Bur03].

4.6.4 Parameterschätzung mit der Maximum-Likelihood-Methode

Für die Bestimmung der Parameter einer zweiparametrischen Weibull-Verteilung hat sich die Maximum-Likelihood-Methode (ML-Methode) durchgesetzt. Speziell für die statistische Auswertung von Festigkeitsexperimenten mit keramischen Probekörpern wird die ML-Methode sogar als zuverlässigste Methode zur Schätzung der Weibull-Parameter in der Norm DIN EN 843-5 [DIN07b] vorgeschrieben. Darin wird auch ein Stichprobenumfang von nicht weniger als 30 Proben empfohlen. Die ML-Methode liefert für eine Stichprobe x_i ($i = 1, \dots, N$) diejenigen Parameterschätzwerte einer angenommenen Wahrscheinlichkeitsverteilung (hier ist es die Weibull-Verteilung), welche der Stichprobe die höchste Wahrscheinlichkeit geben. Die Schätzwerte für den Weibull-Modul \hat{m} und die charakteristische Festigkeit \hat{x}_0 (\hat{b} bei Keramik bzw. $\hat{\sigma}_u$ bei Stählen) sind daher ebenfalls statistisch verteilte Zufallsgrößen. Die Likelihood-Funktion L einer Stichprobe für die zweiparametrische Weibull-Verteilung ist gegeben durch

$$L = \prod_{i=1}^N f(x_i, x_0, m) = \prod_{i=1}^N \frac{m}{x_0} \cdot \left(\frac{x_i}{x_0} \right)^{m-1} \cdot \exp \left(- \left(\frac{x_i}{x_0} \right)^m \right). \quad (4.140)$$

Der wahrscheinlichste Parametersatz liefert ein Maximum dieser Funktion und zugleich der Log-Likelihood-Funktion $\ln L$. Nach Differentiation nach den Parametern und Gleichsetzen der Ableitungen $\partial \ln L / \partial x_0$ sowie $\partial \ln L / \partial m$ mit Null führt die ML-Methode auf die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hat{m}} + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln x_i - \frac{\sum_{i=1}^N x_i^{\hat{m}} \ln x_i}{\sum_{i=1}^N x_i^{\hat{m}}} &= 0 \\ \hat{x}_0^{\hat{m}} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^{\hat{m}} &= 0 \end{aligned} \quad (4.141)$$

das numerisch ohne größeren Aufwand gelöst werden kann. Die Norm DIN EN 843-5 stellt für diesen Zweck den Quellcode von Computerprogrammbeispielen zur Verfügung. Die statistische Unsicherheit der Parameterschätzwerte wird durch Konfidenzintervalle angegeben. Die Konfidenzintervalle für verschiedene Vertrauenswahrscheinlichkeiten sind in Abhängigkeit der Parameterschätzwerte \hat{m} und \hat{x}_0 sowie des Stichprobenumfangs N in [DIN07b] tabelliert. Die mit der ML-Methode erhaltenen Schätzwerte für die Weibull-Parameter sind nicht erwartungstreu. Während der Fehler für x_0 vernachlässigbar klein ist, muss der Schätzwert \hat{m} mit einem von N abhängigen Biasfaktor *bias* korrigiert werden:

$$\hat{m}_{\text{cor}} = \hat{m} \cdot \text{bias}(N). \quad (4.142)$$

Der Biasfaktor ist ebenfalls in [DIN07b] tabelliert, alternativ können die Daten mit folgender Gleichung approximiert werden [DIN07b]:

$$\text{bias}(N) = 1 - 1,593145 \cdot N^{-1,046958} \quad \text{für } 5 \leq N \leq 120. \quad (4.143)$$

Während die Schätzung der Weibull-Parameter für Keramik mit der ML-Methode nach [DIN07b] klar und einfach geregelt ist, gestaltet sich die Berechnung der Weibull-Parameter des BEREMIN-Modells und seiner Erweiterungen etwas aufwendiger. Der Grund ist, dass die Zufallsgröße σ_W vom zu schätzenden Weibull-Modul m abhängt, die Bestimmung der Weibull-Parameter muss deshalb iterativ erfolgen [Min92, Rie98]. Ausgehend von einem Startwert m_0 (z.B. 20) wird die Weibull-Spannung σ_{Wi} ($i = 1, \dots, N$) für jede der N bis zum Spröbruch belasteten Proben berechnet. Auf diese berechnete Stichprobe $\sigma_{W1}, \dots, \sigma_{WN}$ wird das ML-Schätzverfahren angewendet. Wenn der Schätzwert \hat{m}_1 mit dem Startwert bis auf einen Fehler ϵ übereinstimmt, werden die berechneten Schätzwerte akzeptiert. Andernfalls wird die Weibull-Spannung mit dem verbesserten Schätzwert \hat{m}_1 neu berechnet und anschließend die ML-Schätzung für die neu berechnete Stichprobe

durchgeführt. Die Iterationsschleife wird so oft durchlaufen, bis die Fehlerschranke unterschritten ist. Die Abbildung 4.10 zeigt schematisch den Ablauf der Parameterschätzung.

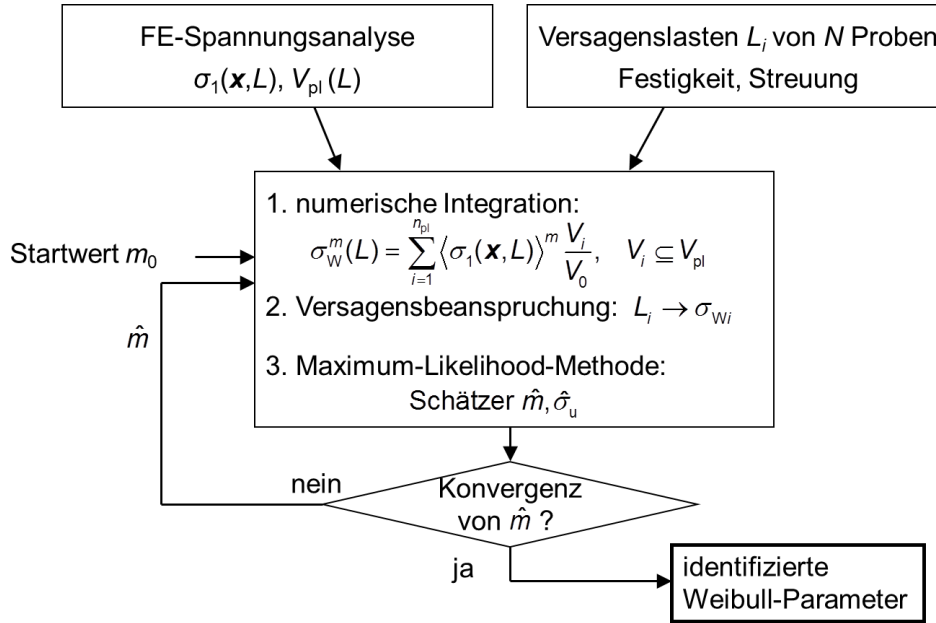


Abbildung 4.10: Ablauf der iterativen Parameterschätzung für das BEREMIN-Modell

4.6.5 Weibull-Darstellung

Für die grafische Aufbereitung der Ergebnisse werden die Versuche nach steigender Bruchlast x_i geordnet und von $i = 1$ bis N durchnummeriert. Die Bezeichnung x_i steht stellvertretend für die Bruchspannung σ_{ci} bzw. die Weibull-Spannung σ_{Wi} . Jedem x_i wird eine empirische Ausfallwahrscheinlichkeit P_{fi} zugeordnet. Aus der Literatur sind verschiedene Zuordnungsvorschriften (Schätzer) bekannt, die sich allerdings nur für große und kleine Ausfallwahrscheinlichkeiten wesentlich unterscheiden. Gebräuchliche Schätzer sind

$$P_{fi} = \frac{i - 0,5}{N}, \quad (4.144)$$

$$P_{fi} = \frac{i - 0,3}{N + 0,4}. \quad (4.145)$$

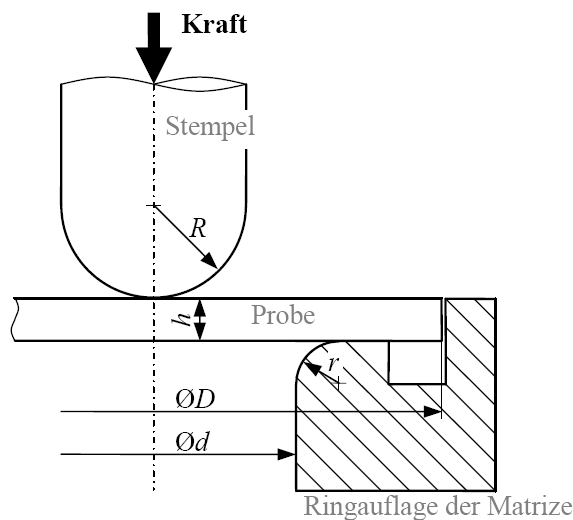
Die Norm [DIN07b] verwendet (4.144), andere Autoren wie ABERNETHY [Abe06a] oder WALLIN [Wal02] favorisieren den Median-Rank-Schätzer (4.145). Anstelle des Auftrags P_{fi} über x_i hat sich die Darstellung im sogenannten Weibull-Diagramm etabliert. Dabei wird $\ln \ln(1/(1 - P_{fi}))$ über $\ln x_i$ aufgetragen. Eine Weibull-Verteilung erscheint in dieser Darstellung als Gerade mit dem Anstieg m , die durch den Punkt $(\ln x_0, 0)$ verläuft.

5 Experiment

Der SPT soll in dieser Arbeit für die Charakterisierung des Verformungs- und Versagensverhaltens verschiedener spröde-duktiler und spröder Konstruktionswerkstoffe qualifiziert werden. Dabei spielt die Optimierung der Versuchsanordnung für sprödes Materialverhalten eine wichtige Rolle, denn der SPT wurde ursprünglich für duktile Werkstoffe mit großer plastischer Verformbarkeit entwickelt. Weil spröde Werkstoffe schon bei kleineren Verformungen versagen, stellt dies erhöhte Anforderungen an die Maßgenauigkeit der Versuchsanordnung und die Messung der Probenverformung. Die Charakterisierung der statistisch streuenden Sprödbbruchfestigkeit erfordert die Anwendung probabilistischer Methoden, wofür eine größere Probenanzahl geprüft werden muss. FEM-Simulationen mit unterschiedlichen Geometrievarianten dienen der Optimierung der Versuchsgeometrie. Hier werden nur die experimentell realisierten Varianten (Abschnitt 5.1) vorgestellt. Die zugehörigen FEM-Simulationen werden im Kapitel 6 beschrieben. Um die zunehmende Versprödung von ferritischen Stählen in ihrer Zähigkeitstieflage mit dem SPT untersuchen zu können, war es erforderlich, eine Kühleinrichtung zu entwickeln, mit der Versuche im Temperaturbereich von $+20\text{ °C}$ bis mindestens -150 °C möglich sind (Abschnitt 5.2). Die untersuchten Beispielwerkstoffe (zwei ferritische Stähle bei tiefen Temperaturen, eine Laserschweißnaht mit lokal veränderlichen Werkstoffeigenschaften und eine technische Aluminiumoxidkeramik) werden im Abschnitt 5.3 vorgestellt. Anschließend wird im Abschnitt 5.4 auf die Techniken zur Probenentnahme und -präparation eingegangen. Details zur Messung von Kraft- und Wegsignal liefert Abschnitt 5.5. Die gemessenen Kraft-Verschiebungs-Kurven sowie mikroskopische Bilder der Bruchflächen werden im Abschnitt 5.6 vorgestellt.

5.1 Versuchsauslegung und Konfigurationen

Bei der konstruktiven Auslegung wurde viel Wert auf eine einfach zu handhabende experimentelle Anordnung gelegt, die einen schnellen Probenwechsel ermöglicht. Der SPT wird in dieser Arbeit nicht in der gebräuchlichen Tiefziehvariante (*bulge test*), sondern in der ursprünglichen Variante als elastisch-plastischer Scheibenbiegeversuch (*disk bending test*) verwendet. Auf den sonst üblichen Niederhalter wird aus zwei Gründen bewusst verzichtet. Erstens wirkt sich die schwer zu kontrollierende Andruckkraft des Niederhalters



Variante	Stempel	Matrize
1	Stahl $R = 1,25 \text{ mm}$	Stahl $r = 0,65 \text{ mm}$
2	Stahl $R = 2,5 \text{ mm}$	Hartmetall $r = 0,5 \text{ mm}$
3	Hartmetall $R = 1,25 \text{ mm}$	Hartmetall $r = 0,5 \text{ mm}$

Abbildung 5.1: Prinzipskizze des SPT ohne Niederhalter mit Ringnut und verwendete Konfigurationen

messbar auf die Kraft-Verschiebungs-Kurve aus, wie eine Untersuchung von BROOKFIELD et al. [Bro99] zeigt. Zweitens wird durch den Niederhalter die Probe am Rand quasi eingespannt. Das Einspannmoment ist bei sprödem Materialverhalten unerwünscht, da es dort zu hohen Zugspannungen kommen kann, wodurch die Spaltbruchinitiierung an den Einspannrand verschoben wird. Zusätzlich vereinfacht der Verzicht auf den Niederhalter den Probenwechsel. Abbildung 5.1 zeigt die Skizze des Versuchsaufbaus. In einer FEM-Studie wurde der SPT mit und ohne Niederhalter verglichen. Dabei zeigte sich, dass durch den Verzicht kein Informationsverlust in der Kraft-Verschiebungs-Kurve auftritt. Im Gegenteil, die Kurve ohne Niederhalter zeigt sogar einen stärker ausgeprägten gekrümmten Verlauf, wie man sich im Anhang A.3.1 überzeugen kann. Damit die Probenscheiben nicht am Außenrand $D/2$ aufliegen, wurde eine Ringnut in die Matrize eingebracht. Das ist besonders wichtig bei Keramikproben. Eine Nachbearbeitung der Probekante (Entgraten, Anfasen) wird dadurch überflüssig. In dieser Form entspricht der Versuch dann dem Punch-on-Ring-Test beziehungsweise Ball-on-Ring-Test.

Im Zeitraum der Arbeit wurden geringfügige Modifikationen am Versuchsaufbau vorgenommen, um den speziellen Anforderungen der zu prüfenden Werkstoffe gerecht zu werden. Insgesamt kamen dabei drei SPT-Konfigurationen mit variierenden Abmessungen von Stempel und Matrize zum Einsatz, die entweder aus gehärtetem Stahl oder aus Hartmetall (WC-Co-Hartmetalllegierung) gefertigt wurden (Abb. 5.1). Für die elastischen Keramikproben wurde der Stempelradius in Konfiguration 2 von 1,25 mm auf 2,5 mm vergrößert, um hohe Druck- und Schubspannungen, die nicht durch plastische Deformationen abgebaut werden können, zu vermindern. Die FEM-Studie im Anhang A.3.2 dokumentiert den signifikanten Einfluss, den der Stempelradius auf die Größe der Spannungen in der Kontaktzone besitzt. Nachdem sich auf der Matrize aus Stahl unter dem Lichtmikroskop

deutliche Gebrauchsspuren in Form von Riefen und Kratzern abzeichneten, wurde zunächst die Matrize und dann der Stempel aus Hartmetall gefertigt. Bei etwa gleichen Fertigungskosten besitzen die polierten Hartmetallbauteile eine bessere Oberflächengüte und bessere Verschleißigenschaften (und gegenüber Keramikbauteilen eine höhere Zähigkeit). Zusätzlich bewirkt die deutlich höhere Materialsteifigkeit auch eine höhere Apparatursteifigkeit. Für die verschleißbeanspruchten Apparaturbauteile sollte in Zukunft grundsätzlich Hartmetall anstatt gehärtetem Stahl verwendet werden. Anhang B liefert die Fertigungszeichnungen für Konfiguration 3 mit Stempel und Matrize aus Hartmetall.

5.2 SPT-Apparatur für Tieftemperaturversuche

Für die Durchführung von Tieftemperaturversuchen mit dem SPT wurde am IMFD eine Kühlapparatur mit flüssigem Stickstoff als Kühlmedium entwickelt, theoretisch sind damit Prüftemperaturen bis -196°C möglich. Die Apparatur wurde so konzipiert, dass sie mitsamt der Isolation und Anschlussleitungen für den flüssigen Stickstoff in eine konventionelle Zug-Druck-Prüfmaschine eingebaut werden kann (Abb. 5.2). Der Einbau erfolgte schließlich in eine am IMFD vorhandene elektromechanische 10kN-Universalprüfmaschine (Shimadzu AGS-10kN). Die Probenverformung wird indirekt über den Stempelweg erfasst. Das obere Ende des Stempels ragt aus der Kühlapparatur heraus und wird von einer sehr steifen ebenen Platte belastet, die gleichzeitig die Spitze eines induktiven Wegaufnehmers parallel mit der Stempeloberkante nach unten bewegt.

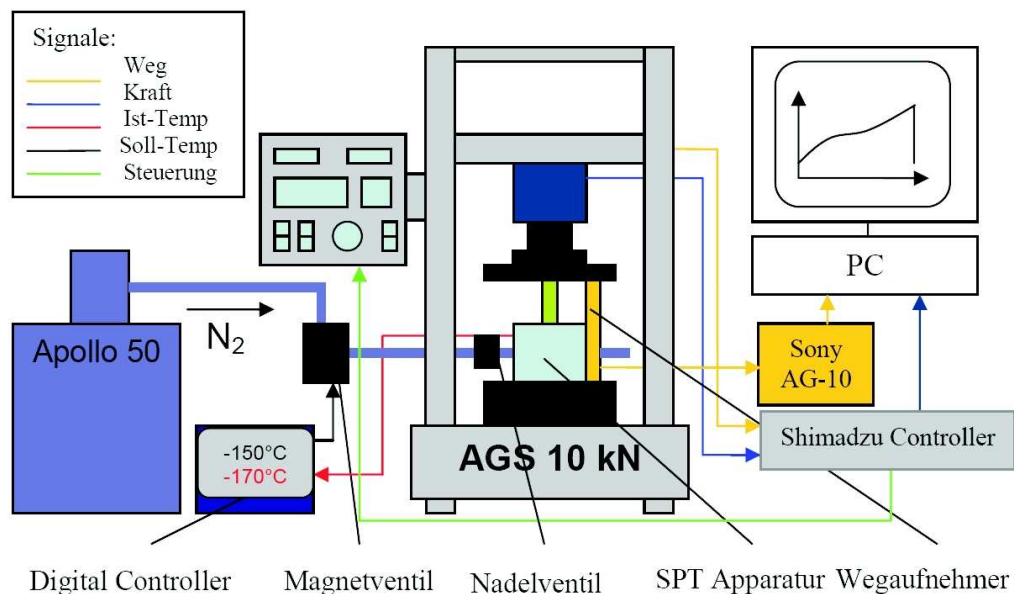


Abbildung 5.2: SPT-Versuchsaufbau bei tiefen Temperaturen mit Stickstoffkühlung, Schema aus [Sch05]

Es wurden zwei verschiedene Kühlvarianten konstruktiv umgesetzt und versuchstechnisch erprobt [Sch05]. In der ersten Variante wurde der Stickstoff direkt über die zu kühlende Probe geleitet. Dies ermöglichte zwar eine sehr schnelle Abkühlung, allerdings erwies sich die Einstellung der Prüftemperatur als zu ungenau, die Temperaturen schwankten mehr als 10 K um den Sollwert. Die zweite Variante realisiert eine indirekte Kühlung nach dem Prinzip eines Wärmetauschers. Der Stickstoff wird durch eine äußere Kammer geleitet, so dass er mit der Probe in der inneren Kammer nicht in Berührung kommt. Die indirekte Kühlung erwies sich als die bessere Variante, die Temperaturschwankungen konnten auf ± 2 K begrenzt werden. Abbildung 5.3 zeigt den Aufbau der Kühlapparatur mit indirekter Kühlung. Die Temperatur wird mit einem Thermoelement (Typ T, Toleranzklasse 2) in der inneren Kammer gemessen. Bedingt durch die indirekte Kühlung liegt die tiefstmögliche Prüftemperatur etwas oberhalb der Siedetemperatur des flüssigen Stickstoffs. Es konnten Versuche mit Temperaturen bis zu -191 °C durchgeführt werden.

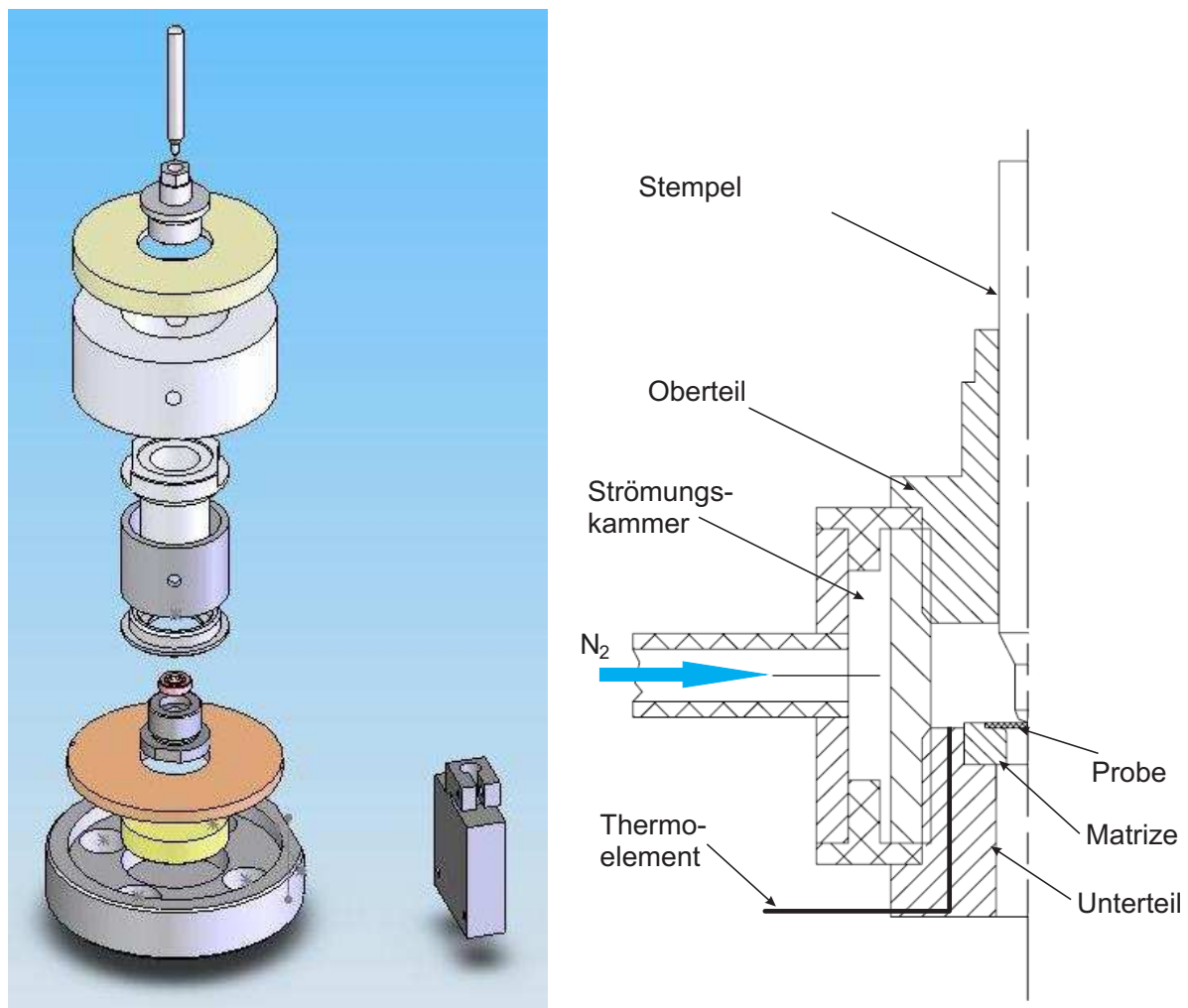


Abbildung 5.3: links: Explosionszeichnung der Kühlapparatur für den SPT, rechts: Halbschnitt durch die Kühlkammer (ohne Isolation)

Ein Probenwechsel kann auch im gekühlten Zustand der Apparatur vorgenommen werden, dazu muss lediglich das Oberteil der Isolierung, der Stempel und das Oberteil der Kühlapparatur abgenommen werden. Die Proben werden mit einer Pinzette gewechselt. Prinzipiell sind damit sehr schnelle Probenwechsel und Prüfzyklen mit bis zu fünf Versuchen pro Stunde möglich. Praktisch hat sich jedoch gezeigt, dass bei sehr tiefen Prüftemperaturen die Luftfeuchtigkeit der warmen Raumluft während des Probenwechsels zur Bildung eines Eisniederschlags auf den kalten Apparaturbauteilen führen kann. In diesem Fall muss die gesamte Apparatur zwischenzeitlich erwärmt, abgetaut und getrocknet werden. Dennoch ist aufgrund des kleineren Volumens von Probe und Apparatur, das gekühlt bzw. erwärmt werden muss, eine schnellere Versuchsdurchführung als bei großen Proben möglich. Abbildung 5.3 illustriert die Größe auf einem Foto.



Abbildung 5.4: Größenvergleich der Kühlapparatur (ohne Anschlussleitungen und Isolation)

5.3 Untersuchte Werkstoffe

5.3.1 Ferritischer Stahl 22NiMoCr37

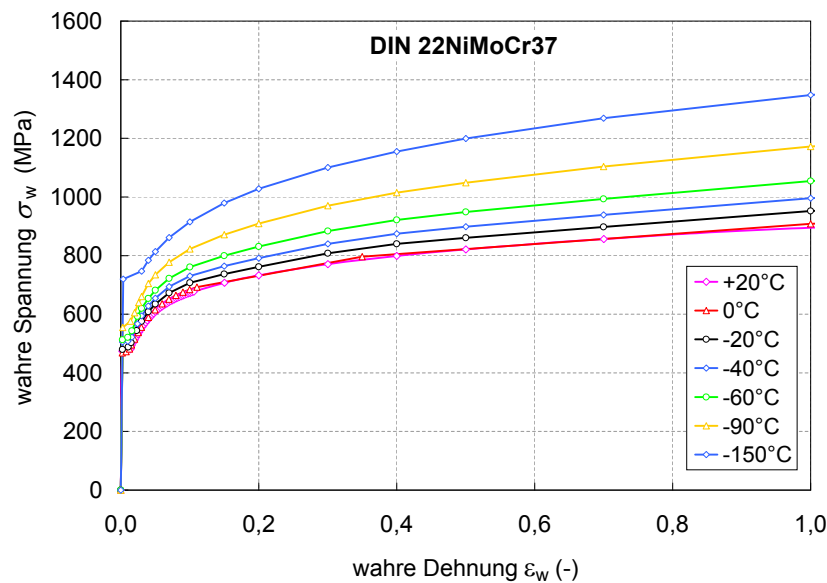
Der ferritische Stahl 22NiMoCr37 ist ein vergüteter Druckbehälterstahl, der für den Bau von Reaktordruckbehältern in Kernkraftwerksanlagen deutscher Bauart (Typ Siemens-KWU Erlangen) verwendet wird. Aus einem Europäischen Verbundprojekt [Hee02] liegen Festigkeitskennwerte und bruchmechanische Kennwerte bei Raumtemperatur und mehreren tiefen Temperaturen bis -154°C vor. Außerdem sind die temperaturabhängigen Fließkurven des Stahles verfügbar, da er für den numerischen Ringversuch des ESIS Technical Committee 8 verwendet wurde, um die FEM-Berechnungsmethoden zum „Local approach“ zu verifizieren [Pou04]. Der Stahl gehört damit zu den am besten charakterisierten Druckbehälterstählen. Die chemische Zusammensetzung ist in Tabelle 5.1 angegeben. Die Tabelle 5.2 fasst die Ergebnisse der Zugversuche bei verschiedenen Temperaturen zusammen. Die wahren Spannungs-Dehnungs-Kurven zeigt Abbildung 5.5.

Tabelle 5.1: Chemische Zusammensetzung von 22NiMoCr37 in Gewichts-% [Hee02]

C	Si	P	S	Cr	Mn	Ni	Cu	Mo
0,21	0,24	0,003	0,004	0,003	0,82	0,79	0,049	0,56

Tabelle 5.2: Ergebnisse der Zugversuche für 22NiMoCr37 [Hee02]

Temperatur (°C)	Streckgrenze (N/mm ²)	Zugfestigkeit (N/mm ²)	Brucheinschnürung (%)
20	470 ± 0	612 ± 0	70
0	470 ± 0	619 ± 0	68
−20	475 ± 4	637 ± 0	70
−40	504 ± 5	661 ± 0	71
−60	506 ± 0	670 ± 3	71
−91	538 ± 5	699 ± 7	69
−110	568 ± 11	735 ± 7	71
−154	677 ± 18	807 ± 18	70

**Abbildung 5.5:** Wahre Spannungs-Dehnungs-Kurven des Stahles 22NiMoCr37 für Round Robin des ESIS TC8 [Pou04, Hee99]

Aus dem Verbundprojekt [Hee02] war noch genug Material in Form eines Blockes aus der Druckbehälterwand mit der Bezeichnung SX7 verfügbar. Es konnten Small-Punch-Proben im Wandtiefenbereich von 120 bis 140 mm entnommen werden, wobei die ebenen Probenflächen in Umfangsrichtung der Behälterwand orientiert sind, die Oberflächennormale der SP-Proben also in radiale Wanddickenrichtung zeigt (Abbildung 5.6).

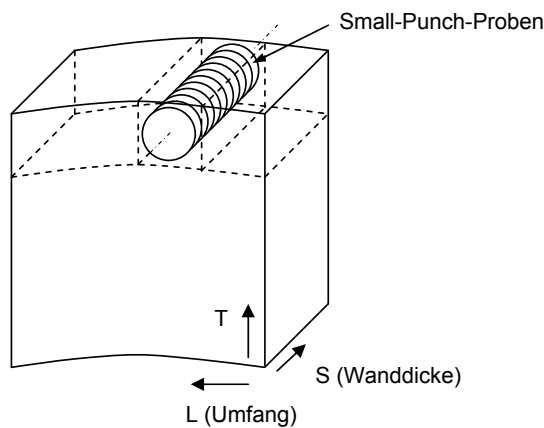


Abbildung 5.6: Orientierung der entnommenen Small-Punch-Proben aus 22NiMoCr37 und 18Ch2MFA in einem Block der Druckbehälterwand. Anstelle der Behältergeometrie sind die Walzrichtungsbezeichnungen (L, T und S) angegeben.

5.3.2 Ferritischer Stahl 18Ch2MFA

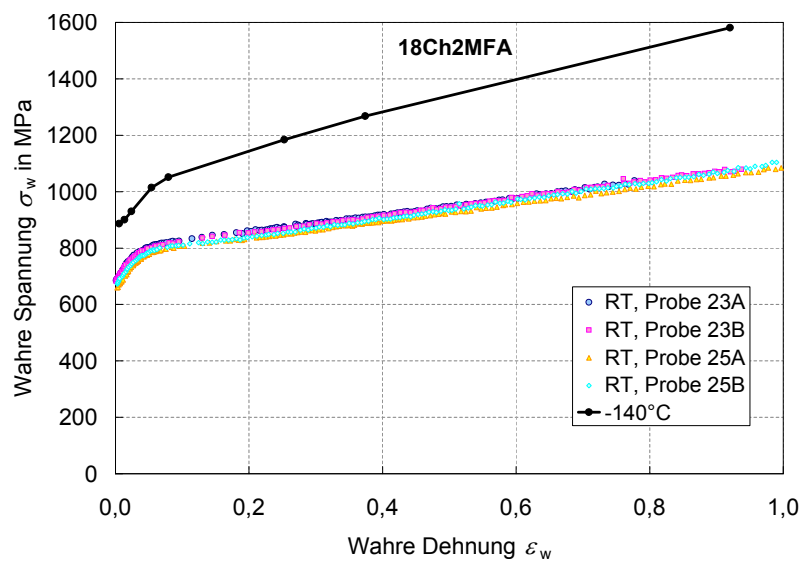
Der niedriglegierte Cr-Mo-V-Stahl 18Ch2MFA kam für Reaktordruckbehälter des Typs WWER-440 (russische Bauart) zum Einsatz und wurde im Rahmen eines Forschungsprojektes an der TU Bergakademie Freiberg von MÜLLER [Mül99] in der Zähigkeitshochlage und im duktil-spröden Übergangsbereich bis -60°C ausführlich bruchmechanisch untersucht. Aus dem Projekt war noch Restmaterial einer CCA-Probe mit der Kennzeichnung LI 1.4 übrig, die für die Entnahme von SP-Proben genutzt werden konnte. Die Probe stammt aus einem Deckelringsegment (Flanschwerkstoff, Wandtiefe 200 mm) eines Druckbehälters für Versuchszwecke aus der Reserve des ehemaligen Kernkraftwerks Greifswald (KKW Nord). Die SP-Proben wurden mit der Probenebene in Umfangsrichtung der Behälterwand entnommen, die Flächennormale zeigt also in Wanddickenrichtung (Abbildung 5.6). Die folgend aufgeführten Werkstoffdaten stammen aus der Arbeit von MÜLLER [Mül99]. Die chemische Zusammensetzung am Entnahmeort dokumentiert Tabelle 5.3. Die Gefügeanalyse zeigte bainitisches Gefüge mit nichtmetallischen Einschlüssen (Mangansulfid, Oxide, Carbide), deren Länge bis zu $100\text{ }\mu\text{m}$ erreicht. Die Tabelle 5.4 fasst die Ergebnisse der Zugversuche bei verschiedenen Temperaturen für den Flanschwerkstoff zusammen. Die Spannungs-Dehnungs-Kurve lag allerdings nur bei Raumtemperatur vor. Um zumindest in der Zähigkeitstieflage eine Fließkurve zur Validierung der SPT-Ergebnisse zu haben, wurden zusätzlich Zugversuche mit vier glatten Rundzugproben bei -140°C am GKSS Forschungszentrum Geesthacht (Dr. Heerens) durchgeführt. Für die Spannungs-Dehnungs-Kurve oberhalb der Gleichmaßdehnung wurden der eingeschnürte Querschnitt nach dem Versuch vermessen und zwei Proben wurden vorzeitig entlastet. Das Ergebnis zeigt Abbildung 5.7.

Tabelle 5.3: Chemische Zusammensetzung von 18Ch2MFA in Gewichts-% [Mül99]

C	Si	Mn	P	S	Cr	Mo	Ni	Cu	V
0,17	0,27	0,39	0,012	0,011	2,34	0,66	0,13	0,11	0,31

Tabelle 5.4: Ergebnisse des Zugversuchs für 18Ch2MFA [Mül99]

Temperatur (°C)	0,2%-Dehngrenze (N/mm ²)	Zugfestigkeit (N/mm ²)	Bruchdehnung (%)	Brucheinschnürung (%)
22	654 – 680	742 – 774	18 – 20	67 – 73
0	666 – 694	766 – 800	18 – 21	65 – 73
–20	672 – 700	778 – 818	18 – 21	67 – 73
–40	688 – 708	800 – 834	19 – 21	65 – 72
–60	704 – 728	824 – 850	19 – 23	64 – 70

**Abbildung 5.7:** Wahre Spannungs-Dehnungs-Kurven des Stahles 18Ch2MFA, vier Proben einzeln bei Raumtemperatur [Mül99] und vier Proben gemittelt bei –140 °C

5.3.3 Lasergeschweißter Stahl 355 EMZ

Es handelt sich um eine laserstrahlgeschweißte 12 mm dicke Platte aus ferritischem Stahl. Die Schweißverbindung wurde am GKSS Forschungszentrum Geesthacht bruchmechanisch untersucht [Hee03]. Die chemische Zusammensetzung ist in Tabelle 5.5 angegeben. Mechanische Referenzkennwerte bei Raumtemperatur aus [Hee03] sind in Tabelle 5.6 aufgeführt. Die Verfestigungskurve wurde in der Quelle vereinfacht linear angenähert.

Tabelle 5.5: Chemische Zusammensetzung von 355 EMZ in Gewichts-% [Hee03]

C	Si	Mn	S	P	Cr	Al
0,1	0,42	1,48	0,0004	0,011	0,013	0,041
Mo	Nb	Ti	V	Ni	Cu	N
0,0001	0,022	0,005	0,003	0,486	0,003	0,007

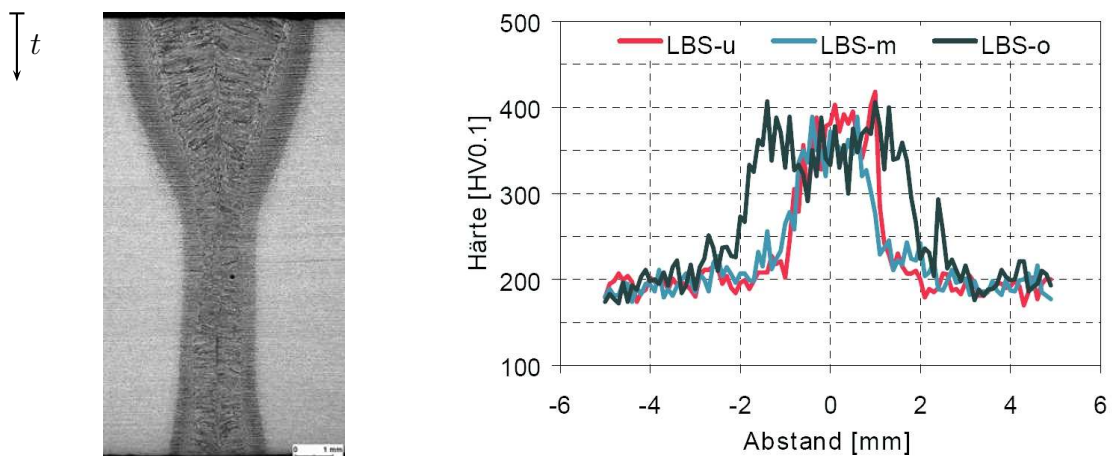
Tabelle 5.6: Mechanische Werkstoffkennwerte von 355 EMZ bei Raumtemperatur [Hee03]

Gefüge	Mikrohärte HV 20	Fließgrenze σ_{F0} (MPa)	Verfestigung $d\sigma/d\varepsilon$ (MPa)
Grundwerkstoff	200	400	1000
Schmelzzone	400	830	1000

Aus der Platte wurde eine Probe für Gefügeuntersuchungen und Härtemessungen entnommen, die am Institut für Werkstofftechnik (IWT) der TU Bergakademie Freiberg durchgeführt wurden. Abbildung 5.8 links zeigt eine Makroaufnahme der Schweißnaht, in der die Ausdehnung der Schmelzzone (SZ), der Wärmeeinflusszone (WEZ) und des Grundwerkstoffs (GW) sichtbar ist. Am geätzten Querschliff kann man die einzelnen Zonen gut erkennen, sie variieren über der Plattendicke. Die Vermessung der einzelnen Zonen am oberen Plattenrand ($t = 0$ mm, LBS-o), in der Mitte ($t = 6$ mm, LBS-m) und am unteren Plattenrand ($t = 12$ mm, LBS-u) fasst Tabelle 5.7 zusammen. Die Untersuchung der Gefügeausbildung ergab einen ferritisch-perlitischen GW mit zeilig angeordneten Gefügebestandteilen. Die SZ weist ein grobkörniges martensitisches Gefüge auf. In der WEZ nimmt der Martensitanteil mit zunehmendem Abstand von der SZ von 100% auf 0% ab. Die zugehörigen Härteverläufe zeigt Abbildung 5.8 rechts.

Tabelle 5.7: Vermessung der Schweißnahtbereiche (in mm)

Position	$t = 0$ mm	$t = 6$ mm	$t = 12$ mm
SZ	4,02	1,13	1,89
WEZ1	0,62	0,48	0,34
WEZ2	0,73	0,39	0,39

**Abbildung 5.8:** Makroaufnahme (geätzter Querschliff) der Laserschweißnaht und gemessene Härteverläufe in verschiedenen Tiefen

5.3.4 Aluminiumoxidkeramik Rubalit 708S

Rubalit®708S ist eine 96%-ige Aluminiumoxidkeramik, welche von der Firma CeramTec AG (Plochingen, Deutschland) kommerziell als Foliensubstrat für die Elektronikindustrie hergestellt wird. Diese Keramik mit geschlossener Porosität besitzt ein feinkörniges Gefüge mit einer mittleren Korngröße von 3–5 μm . Der Hersteller gibt die folgenden mechanischen Kennwerte für die Al_2O_3 -Keramik an:

- Elastizitätsmodul (ASTM F 417): 340 GPa,
- Biegefestigkeit mit der Doppelringmethode (ASTM F 417): 500 MPa,
- Biegefestigkeit mit der 4-Punkt-Methode (DIN 52292): 500 MPa.

Weibull-Parameter und Bruchzähigkeitskennwerte liefert der Hersteller nicht, jedoch sind in der Literatur allgemeine Richtwerte für Aluminiumoxidkeramik auffindbar: Weibull-Modul $m = 10$ und Bruchzähigkeit $K_{\text{Ic}} = 3 \dots 6 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$.

Von CeramTec wurden kreisrunde Probenscheiben mit einem Durchmesser von 8 mm und einer mittleren Dicke von 0,6 mm geliefert. Die Scheiben wurden mittels Laser aus dem Foliensubstrat herausgeschnitten und besaßen eine unbearbeitete „as-fired“-Oberfläche.

Um zusätzliche Referenzwerte zu erhalten, wurde CeramTec mit der Lieferung von einachsigen Biegeproben beauftragt, die aus Foliensubstraten der Dicke 1,5 mm mittels Laser angeritzt und dann gebrochen wurden. Diese Biegeproben wurden dann für die Bestimmung der Weibullparameter mit der 4-Punkt-Biegeprüfung und die Bestimmung der Bruchzähigkeit mit der SEVNB-Methode verwendet. Die Probenpräparation, Versuchsdurchführung und Auswertung der Referenzversuche wurde am Institut für Struktur- und Funktionskeramik (ISFK) der Montanuniversität Leoben durchgeführt. Dort wurden auch zusätzlich Referenzversuche für die zweiachsiges Biegefestigkeit mit dem 4-Kugel-Versuch (*Ball-on-three-balls-test* (B3B)) durchgeführt. Dieser relativ neue Versuch wurde 2002 in der Forschungsgruppe von DANZER [Bör02, Dan03, Bör04, Dan07] am ISFK entwickelt und zur Anwendungsreife gebracht. Im 4-Kugel-Versuch können die gleichen Probenscheiben wie im SPT verwendet werden, anstelle der Ringauflage besteht eine Dreipunktauflage.

5.4 Probenentnahme und -präparation

Stahl aus Blockmaterial

Im Fall der beiden Stähle 22NiMoCr37 und 18Ch2MFA wurden die Small-Punch-Proben einem massiven Block entnommen. Zunächst wurden aus diesem rechteckige Stäbe herausgesägt und diese rundgedreht. Die Rundstäbe mit einem Durchmesser von 8 mm wurden

anschließend auf einer Präzisionstrennmaschine (Struers Accutom-50) in Scheiben von 0,6 mm Dicke geschnitten. Durch intensive Flüssigkeitskühlung während des Trennvorgangs wurde sichergestellt, dass keine wärmebedingten Werkstoffveränderungen auftreten. Die abgetrennten Scheiben wurden auf einer Schleif- und Poliermaschine (Struers RotoPol 15 bzw. Buehler Beta mit Vector Power Head) beidseitig planparallel in mehreren Stufen mit feiner werdender Körnung auf eine Enddicke von $0,5 \pm 0,005$ mm geschliffen und poliert. Im letzten Polierschritt wurde SiC-Schleifpapier mit der Körnung FEPA P 2400 verwendet. Aus dem Restmaterial der CCA-Probe LI 1.4 aus 18Ch2MFA konnten ca. 100 Proben entnommen werden. Ein Teil der Proben wurde für die Vorversuche mit der SPT-Kühlapparatur verbraucht. Aus dem Block des Stahles 22NiMoCr37 mit der Bezeichnung SX7 wurden 160 Proben entnommen. Es ist noch genug Restmaterial für die Fertigung weiterer, auch größerer Proben verfügbar.

Stahl aus Laserschweißnaht

Im Fall der lasergeschweißten Platte aus 355 EMZ wurden zunächst Rundstäbe gefertigt, deren Querschnitte parallel zur Symmetrieebene der Laserschweißnaht liegen. Auf diesen Rundstäben wurde durch Anätzen das Nahtgefüge sichtbar gemacht. Aus der Mitte der Schweißnaht wurde jedem Rundstab eine 0,8 mm dicke Scheibe mittels Drahterodieren entnommen. Aus dem die Schweißnaht umgebenden Grundwerkstoff wurden ebenfalls Rundstäbe gefertigt und von diesen in der zuvor beschriebenen Weise mit der Präzisionstrennmaschine Scheiben abgetrennt. Es wurden 24 Proben aus der Schmelzzone (SN) und 39 Proben aus dem Grundwerkstoff (GW) hergestellt. Die Wärmeeinflusszone neben dem ehemals flüssigen Schweißgut war zu schmal, um daraus SPT-Proben zu entnehmen.

Keramik aus Foliensubstrat

Die im Abschnitt 5.3 beschriebenen „as-fired“-Probenscheiben aus Aluminiumoxidkeramik dienten ohne weitere Oberflächenbearbeitung als SPT-Proben für die Festigkeitsversuche. Dies war aufgrund der hohen Oberflächengüte (Rauheit, Ebenheit) möglich. Die Abweichungen der beiden Probenseiten von einer ideal glatten Fläche betrugen nicht mehr als $\pm 2 \mu\text{m}$ bei einer Probendicke von 0,6 mm. Sind die hier vorliegenden engen Toleranzen nicht erfüllt, müssen die Oberflächen plangeschliffen und poliert werden.

Keramikproben mit Indenterissen

Mit Hilfe eines Vickers-Härte-Eindrucks wurden auf einer Seite der Probenscheiben aus Keramik zusätzlich scharfe Indenterisse erzeugt. Ausgangsmaterial sind die gleichen Kera-

mikroscheiben, die auch für die Festigkeitsversuche verwendet wurden. Die mit bloßem Auge spiegelglatt erscheinende, aber mikroskopisch dennoch rauhe „as-fired“-Probenoberfläche musste vor dem Indentereindruck poliert werden. Die begrenzte Tiefenschärfe eines Lichtmikroskops und eine diffus reflektierende „as-fired“-Oberfläche erschweren ansonsten die Erkennbarkeit und somit Vermessbarkeit der Indenterrisse erheblich. Durch das Polieren mit Diamantsuspension wird die Oberfläche plan, Unebenheiten und mögliche Schleifspuren werden entfernt. Das Einbringen der Indenterrisse und die Polierarbeiten wurden am ISFK der Montanuniversität Leoben vorgenommen. Diese spezielle Probenpräparation wird im Detail im Kapitel 9 beschrieben.

5.5 Kraft- und Wegmessung

Während der Versuche wurden gleichzeitig die Zeit, das Kraftsignal der Prüfmaschine, das Wegsignal der Prüfmaschine (Traversenweg), das Signal des Wegmesstasters (Stempelweg) und die Ist-Temperatur am Thermoelement aufgezeichnet. Für die Materialparameteridentifikation wurden allerdings nur die Kraft, der Stempelweg und die Prüftemperatur verwendet.

Die Versuche wurden weggesteuert gefahren. Die Vorschubgeschwindigkeit der Prüfmaschine betrug bei den Proben aus Metall 0,4 mm/min und bei den Proben aus Keramik 0,05 mm/min. Die Wegmessung erfolgte an der Oberkante des Stempels mit Hilfe eines Messtasters, der auf dem Prinzip der induktiven Wegmessung beruht (Sony DG805BC) und eine Auflösung von 1 μm ermöglicht. Die Kraftmessung erfolgte mit dem 10 kN-Kraftsensor der Prüfmaschine (Shimadzu AGS-10kN). Für die Versuche mit Keramikproben wurde aufgrund der kleineren maximalen Kräfte die Kraftmessdose der Prüfmaschine durch eine empfindlichere mit der Maximalkraft 1 kN ausgetauscht. Kraft- und Wegsignal wurden synchron mit einer zeitlichen Auflösung von 0,1 s erfasst und gespeichert.

5.6 Experimentelle Ergebnisse

Während die Stähle bei Raumtemperatur und verschiedenen tiefen Temperaturen mit dem SPT geprüft wurden, erfolgte bei dem Keramikwerkstoff nur ein Prüfung bei Raumtemperatur. Abbildung 5.9 zeigt typische Bruchbilder der Keramik (links), der Stähle bei sprödem Bruchverhalten (mitte) und duktilem Bruchverhalten (rechts) mit der Zuordnung zur Kraft-Verschiebungs-Kurve.

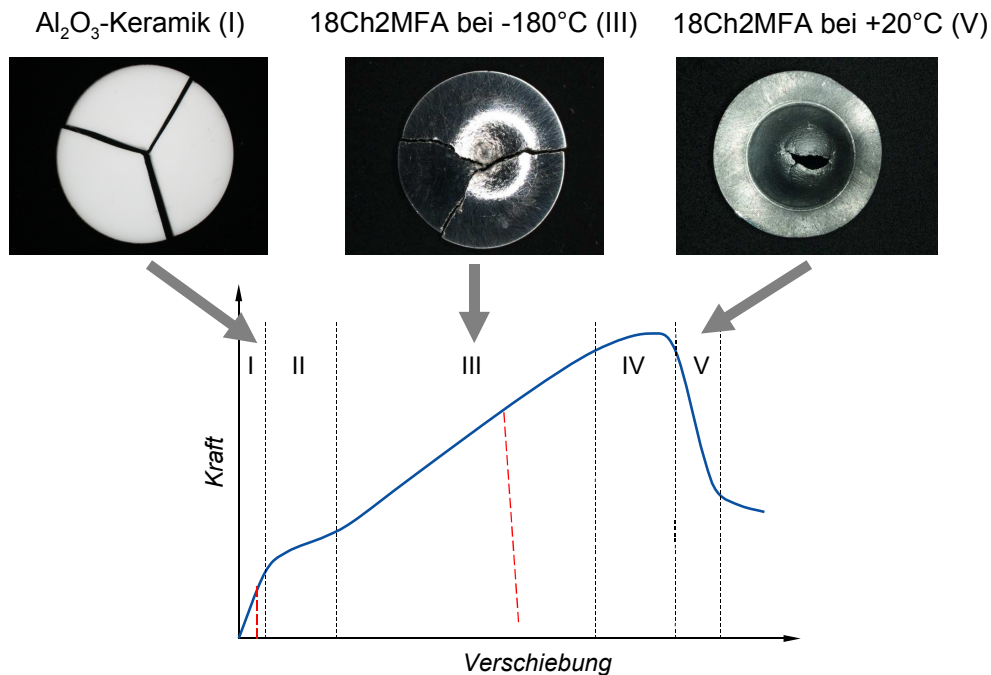


Abbildung 5.9: Spröder bis duktiler Bruch von Small-Punch-Proben aus Keramik und Stahl mit Zuordnung der Versagenszeitpunkte zu den Bereichen der Kraft-Verschiebungs-Kurve

5.6.1 Stahlwerkstoffe

Die beiden ferritischen Druckbehälterstähle wurden in Temperaturschritten von ca. 20 K geprüft. Die Tabelle 5.8 fasst die SP-Versuche mit den beiden Stählen zusammen. Die tiefste Prüftemperatur betrug -191°C bei 22NiMoCr37 und -180°C bei 18Ch2MFA. In den Diagrammen in Abbildung 5.10 und 5.12 werden alle gemessenen Kraft-Verschiebungs-Kurven gezeigt. Zusätzlich wurde die in Abbildung 5.11 und 5.13 zu sehende temperaturabhängige SP-Bruchenergie berechnet (zur numerischen Integration siehe Anhang A.2.1). Mit sinkender Temperatur kann eine Verschiebung des Kraftmaximums der F - u -Kurve nach links mit gleichzeitiger Zunahme des Anstiegs im Kurvenverlauf beobachtet werden. Erst unterhalb -100°C können Sprödbbruchanteile festgestellt werden. 22NiMoCr37 zeigte bei -154°C noch Mischbruch mit jedoch überwiegendem Spaltbruchanteil, bei -170°C und -191°C reinen Sprödbbruch. 18Ch2MFA zeigte bei -140°C Mischbruchverhalten und bei -160°C und -180°C reines Sprödbbruchverhalten. Die spröde gebrochenen Stahlproben weisen eine deutliche Eindellung in der Probenmitte auf, während der Probenrand mit sehr kleinen plastischen Verformungsanteilen nahezu unverformt bleibt. Bei Mischbruch und duktilem Bruch wird die gesamte Probe deutlich plastisch verformt, der Rand außerhalb des Auflageradius klappt nach oben, der Materialbereich unter dem Stempel wird angepasst an die Stempelform napfartig verformt, wobei der Probenquerschnitt im Querschliff eine deutliche Verjüngung aufweist (siehe Makroschliff in Abbildung 5.14).

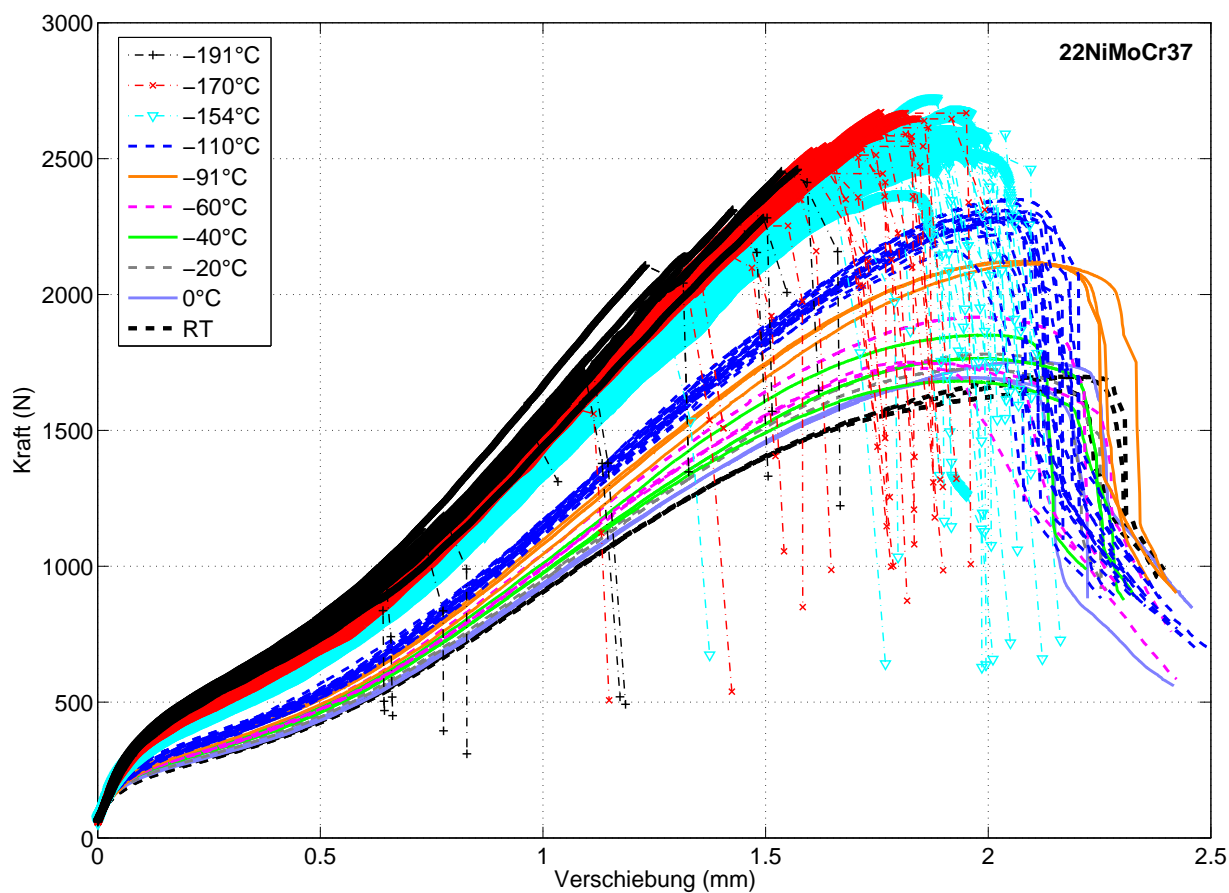


Abbildung 5.10: Alle 127 Kraft-Verschiebungs-Kurven für 22NiMoCr37 bei Raumtemperatur und neun tiefen Temperaturen bis -191°C , Sprödbruchtemperaturen sind mit Symbol gekennzeichnet.

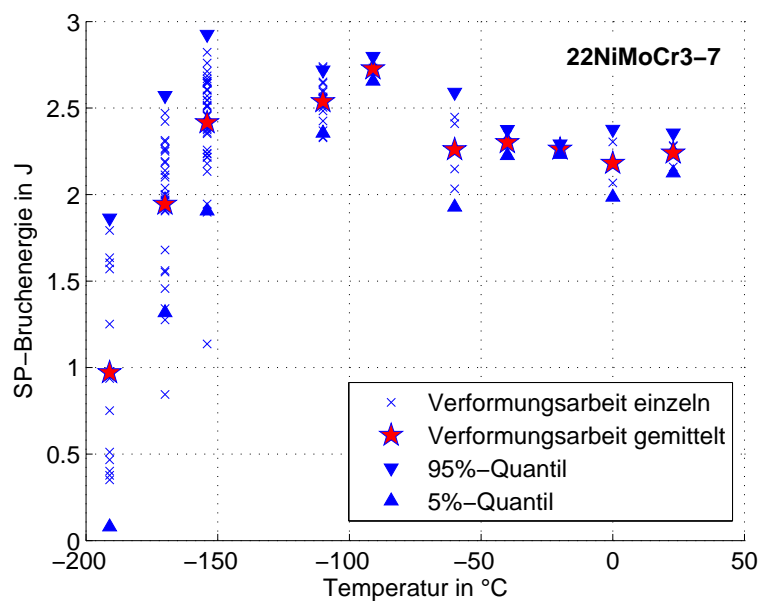


Abbildung 5.11: Temperaturabhängigkeit der Small-Punch-Bruchenergie E^{SP} für 22NiMoCr37

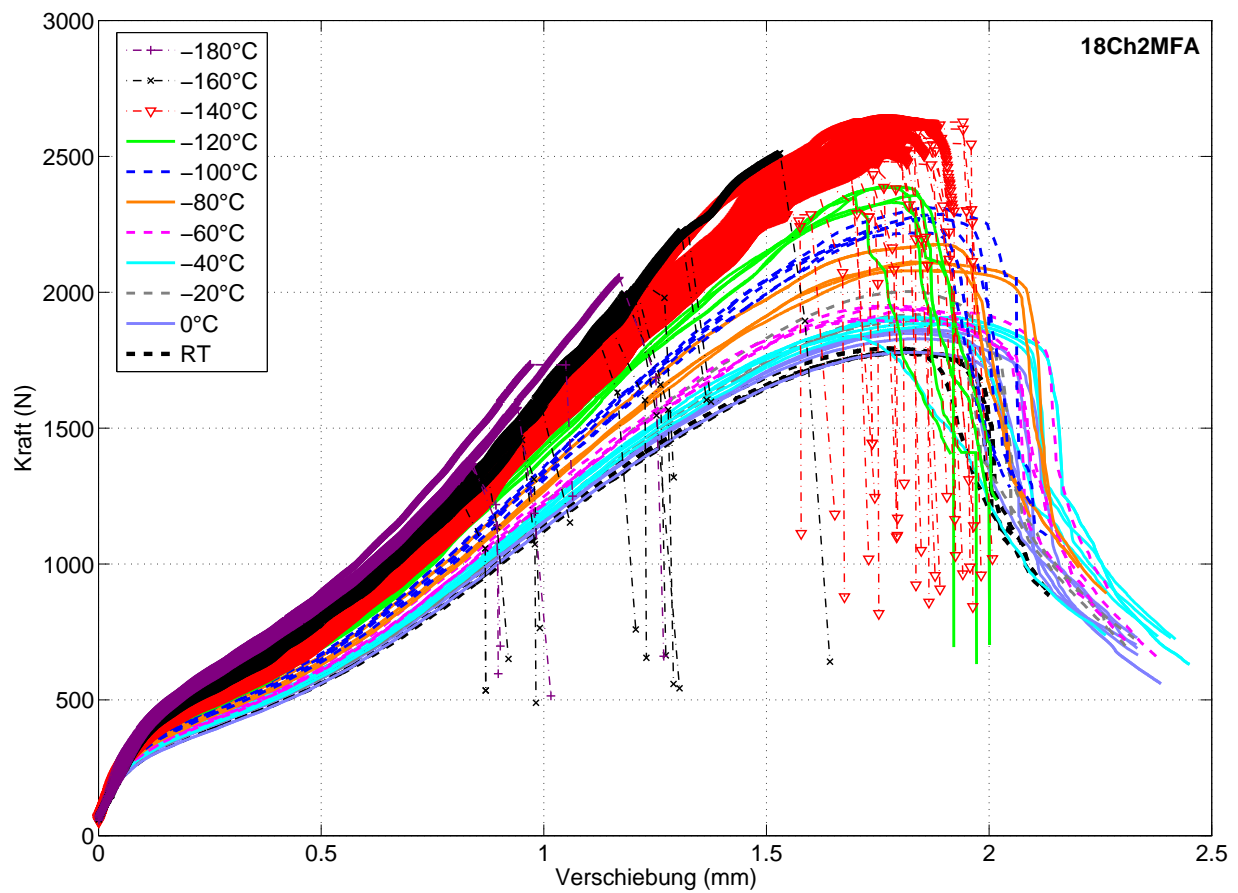


Abbildung 5.12: Alle 96 Kraft-Verschiebungs-Kurven für 18Ch2MFA bei Raumtemperatur und zehn tiefen Temperaturen bis -180°C , Sprödbruchtemperaturen sind mit Symbol gekennzeichnet.

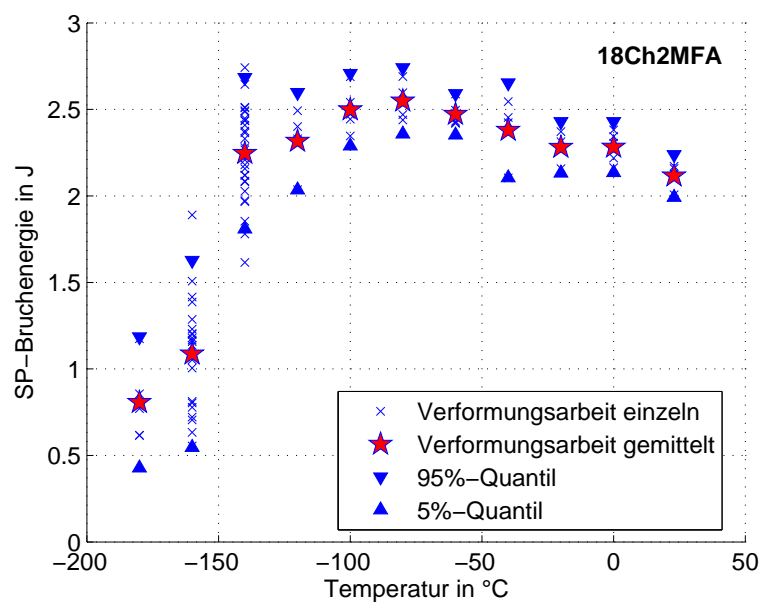


Abbildung 5.13: Temperaturabhängigkeit der Small-Punch-Bruchenergie E^{SP} für 18Ch2MFA

Tabelle 5.8: Zusammenfassung der gültigen Versuche mit SPT-Proben aus 22NiMoCr37 und 18Ch2MFA

22NiMoCr37			18Ch2MFA		
Temperatur	Probenzahl	Bruchbild	Temperatur	Probenzahl	Bruchbild
RT	3	duktil	RT	4	duktil
0 °C	3	duktil	0 °C	5	duktil
−20 °C	2	duktil	−20 °C	4	duktil
−40 °C	3	duktil	−40 °C	5	duktil
−60 °C	4	duktil	−60 °C	4	duktil
−91 °C	3	duktil	−80 °C	4	duktil
−110 °C	19	duktil	−100 °C	5	duktil
−154 °C	40	spröd-duktil	−120 °C	5	duktil
−170 °C	30	spröd	−140 °C	28	spröd-duktil
−191 °C	20	spröd	−160 °C	27	spröd
			−180 °C	5	spröd

Tabelle 5.9: Zusammenfassung der gültigen Versuche mit SPT-Proben aus der Laserschweißnaht

Grundwerkstoff			Schmelzzone		
Temperatur	Probenzahl	Bruchbild	Temperatur	Probenzahl	Bruchbild
RT	21	duktil	RT	10	duktil
−70 °C	11	duktil	−70 °C	13	duktil

Die Tabelle 5.9 fasst die SPT-Versuche mit den Proben aus der Laserschweißnaht zusammen. Der Grundwerkstoff und die Schmelzzone wurden bei Raumtemperatur und bei −70 °C (tiefste Prüftemperatur der Bruchmechanikversuche aus [Hee03]) geprüft. In allen vier Fällen wurde duktiler Versagensverhalten festgestellt. Im Gegensatz zu den Referenzexperimenten mit Bruchmechanikproben, konnte im SPT bei −70 °C kein Sprödbruch beobachtet werden. Die Übergangstemperatur im SPT ist also zu tieferen Temperaturen verschoben, das wurde auch bei den Stählen 22NiMoCr37 und 18Ch2MFA beobachtet. Abbildung 5.15 zeigt, dass bei konstanter Temperatur die F - u -Kurven der Proben aus der Schmelzzone gegenüber den Proben aus dem Grundwerkstoff zu deutlich höheren Kraftwerten verschoben sind. Gleichzeitig verschiebt sich das Kraftmaximum um ca. 0,5 mm nach links. Demgegenüber fällt der Temperatureinfluss weitaus geringer aus. Das Kraftmaximum der F - u -Kurven verschiebt sich bei −70 °C gegenüber Raumtemperatur zwar signifikant um ca. 200 N nach oben, aber das martensitische Gefüge der Schmelzzone weist gegenüber dem ferritischen Gefüge des Grundwerkstoffes ein um ca. 600 N bis 700 N höheres Kraftmaximum auf. Vergleicht man diese Änderung mit der Änderung bei 22NiMoCr37 und 18Ch2MFA (Abb. 5.10 und 5.12) infolge der Temperaturverminderung, also beim Übergang von der Hochlage bis zur Tieflage der Zähigkeit, so zeigt sich, dass die Gefügeumwandlung infolge der Wärmebehandlung beim Schweißen einen ähnlich großen Einfluss auf das Verfestigungsverhalten bewirkt.

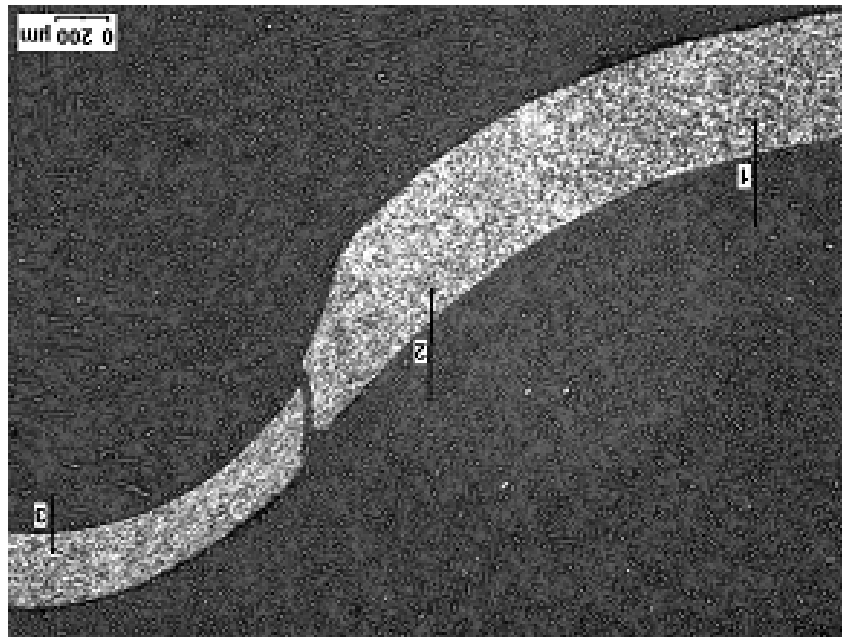


Abbildung 5.14: Querschliff einer duktil verformten Stahlprobe (18Ch2MFA, Raumtemperatur) mit typischer Verjüngung des Querschnitts und Anrissbildung im Bereich des Kontaktes mit dem Stempel

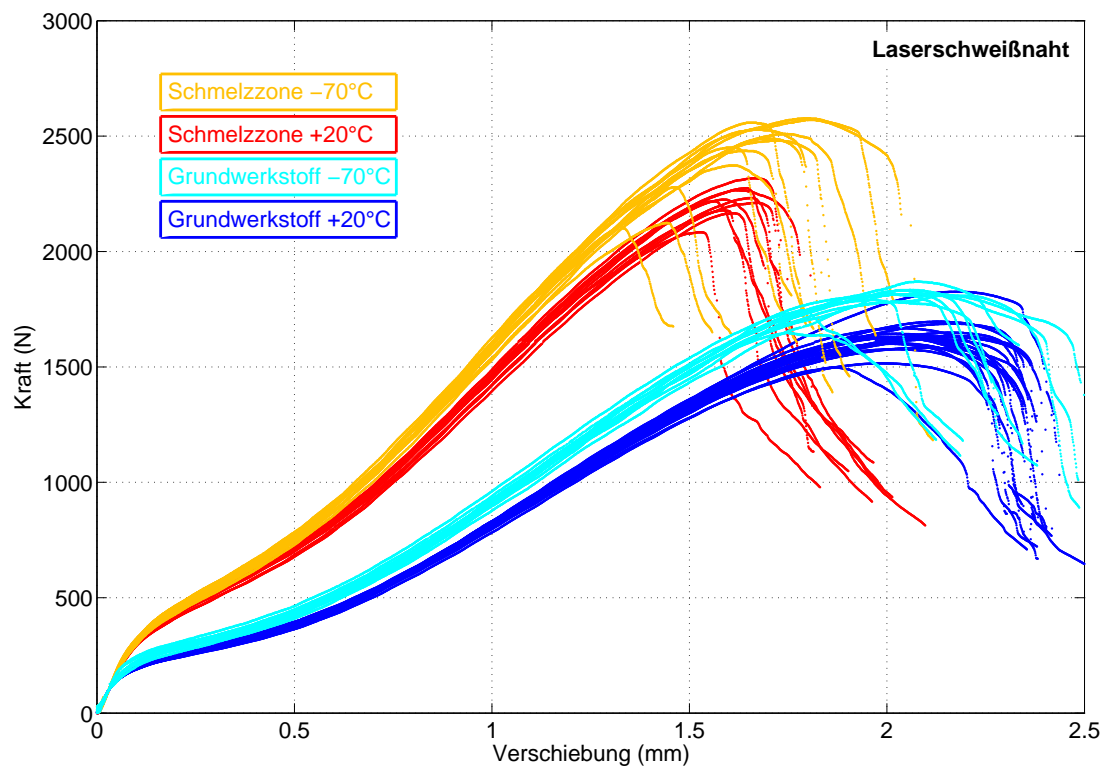


Abbildung 5.15: Alle 55 Kraft-Verschiebungs-Kurven für die Proben aus der Laserschweißnaht bei Raumtemperatur und -70°C

5.6.2 Aluminiumoxidkeramik

Im SPT wurde bei Raumtemperatur die Festigkeit von 30 Keramikproben untersucht. Die Proben versagten bereits bei sehr kleinen Verschiebungen im elastischen Bereich I der F - u -Kurve, wobei die Probenscheiben meist in drei Teile (Abb. 5.9), manchmal aber auch in zwei oder vier Teile zersprangen. Aufgrund der digitalisierten Wegmessung mit einer Auflösung von $1\text{ }\mu\text{m}$ weist die gemessene F - u -Kurve eine Treppenform auf, Abbildung 5.16 zeigt die gemessenen Rohdaten. Erst nach Datenreduktion und Interpolation wird ein geglätteter Kurvenverlauf (Abb. 5.17) erhalten, der für die Bestimmung der elastischen Steifigkeit genutzt werden kann. Die Kurven zeigen eine relative große Streubreite, die jedoch nicht allein die Materialeigenschaften widerspiegelt, sondern auch zufällige Messungenauigkeiten, hervorgerufen durch Fertigungstoleranzen der Apparaturbauteile und Proben sowie die Digitalisierung des Wegsignals. Die Kraft-Zeit-Kurven in Abbildung 5.18 zeigen dagegen eine geringere Streuung auf der Abszisse. Das Zeitsignal wird praktisch ohne Digitalisierungsfehler gemessen und es ist aufgrund der konstanten Vorschubgeschwindigkeit der Prüfmaschine proportional zum Maschinenweg. Da die Maschinensteifigkeit während der Probenbelastung quasi konstant bleibt, kann eine Anstiegsänderung der Kraft-Zeit-Kurve als Steifigkeitsänderung der belasteten Proben interpretiert werden, die aufgrund der besseren digitalen Auflösung genauer als im Kraft-Weg-Diagramm beobachtbar ist.

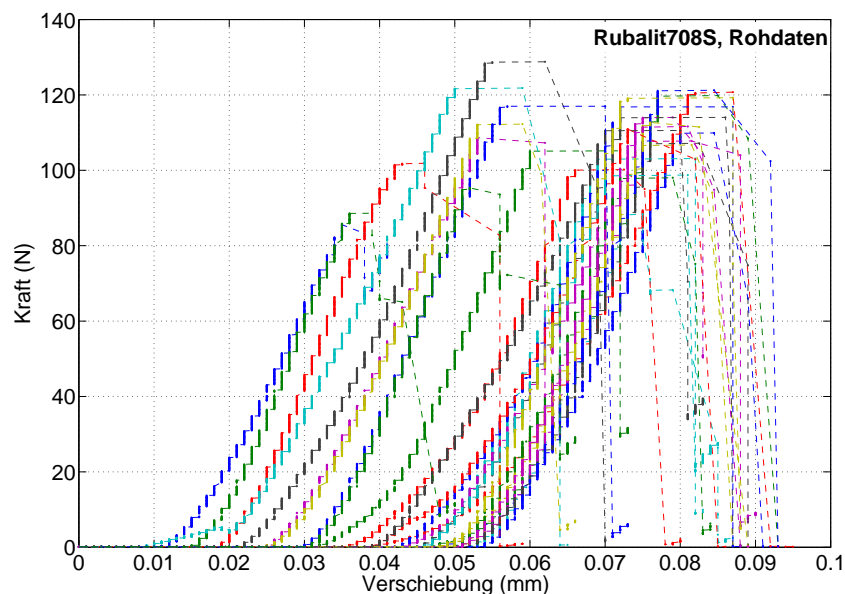


Abbildung 5.16: Rohdaten der Kraft-Weg-Kurven der 30 auf Festigkeit getesteten Keramikproben aus Rubalit708S

Die Versuchsdauer von 40 bis 60 Sekunden bis zum Bruch ist um den Faktor 5 größer, als es die Prüfnorm DIN EN 843-1 [DIN07a] für die Bestimmung der Inertbiegefestigkeit an 3- oder 4-Punkt-Biegeproben vorsieht. Streng genommen müsste daher mit dem SPT

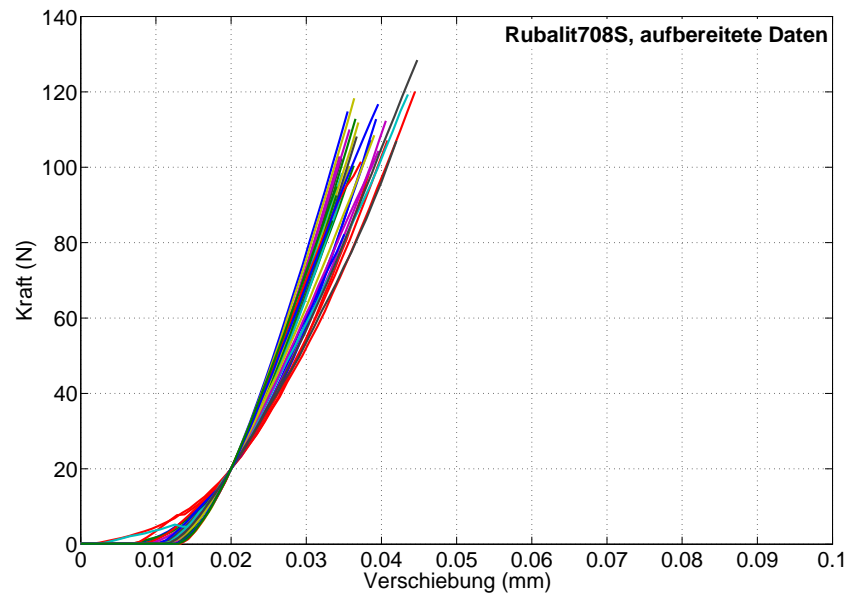


Abbildung 5.17: Kraft-Weg-Kurven der 30 auf Festigkeit getesteten Keramikproben nach der Datenreduktion, geglättet und horizontal zu (0,02 mm, 20 N) verschoben

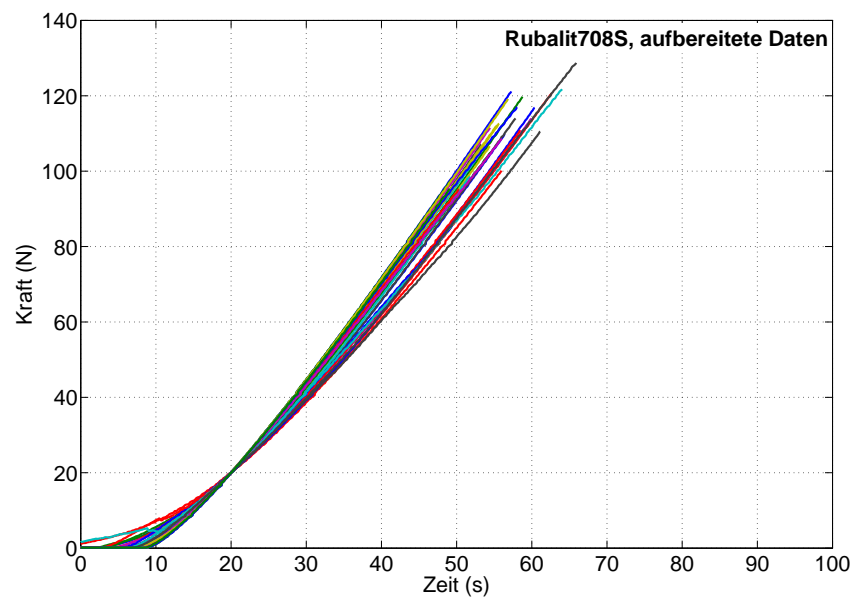


Abbildung 5.18: Kraft-Zeit-Kurven der 30 auf Festigkeit getesteten Keramikproben, horizontal zu (20 s, 20 N) verschoben

eine weitere Versuchsreihe bei höherer Belastungsgeschwindigkeit durchgeführt werden, um den Einfluss der Beanspruchungsrate nachzuweisen. Die relativ langsame Traversengeschwindigkeit der Prüfmaschine von 0,05 mm/min wurde gewählt, um eine möglichst genaue Auflösung der F - u -Kurve zu ermöglichen, welche die Materialsteifigkeit widerspie-

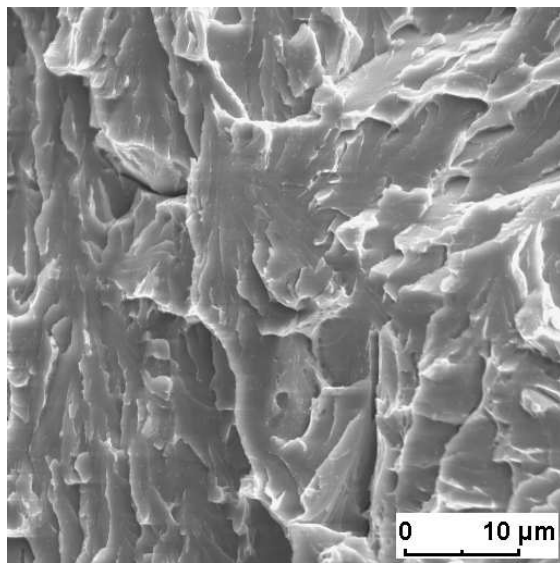
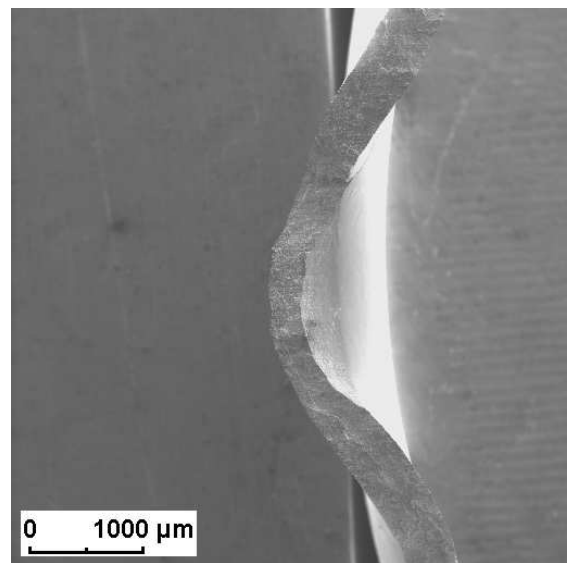
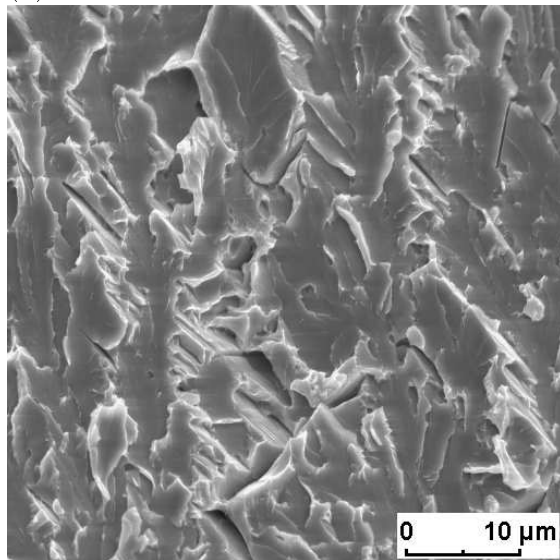
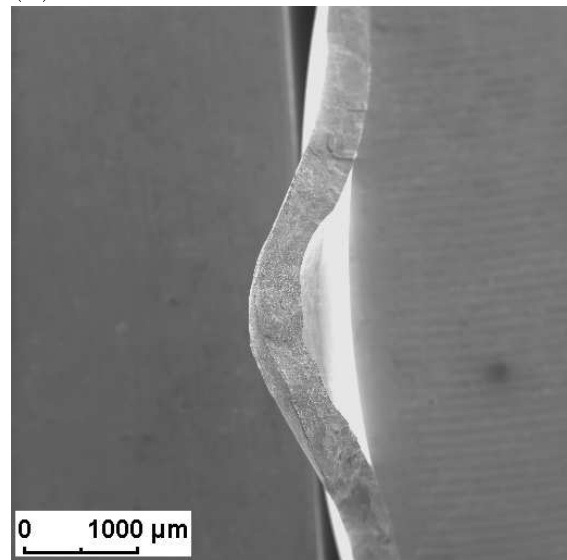
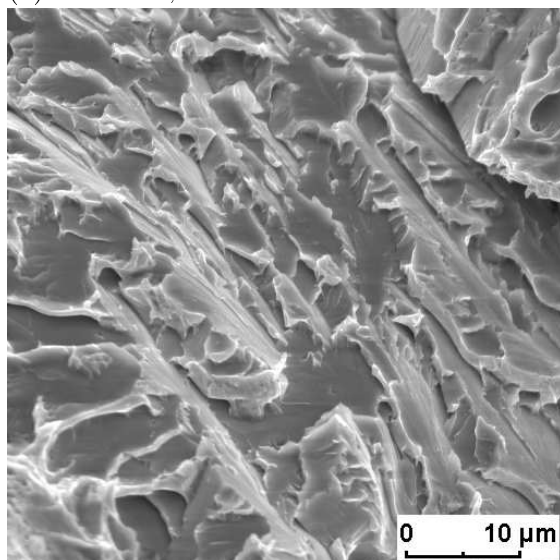
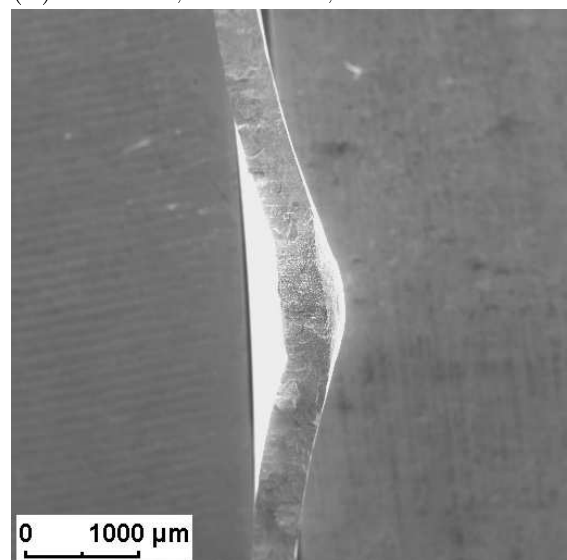
gelt. Die messbare Änderung der Probensteifigkeit spielt bei den Proben eine wichtige Rolle, in die ein Indenterriss eingebracht wurde, denn stabiles Risswachstum würde sich als Verminderung des Kurvenanstiegs bemerkbar machen. Auf die experimentellen Ergebnisse der Keramikproben mit Indenterriss wird später im Kapitel 9 eingegangen.

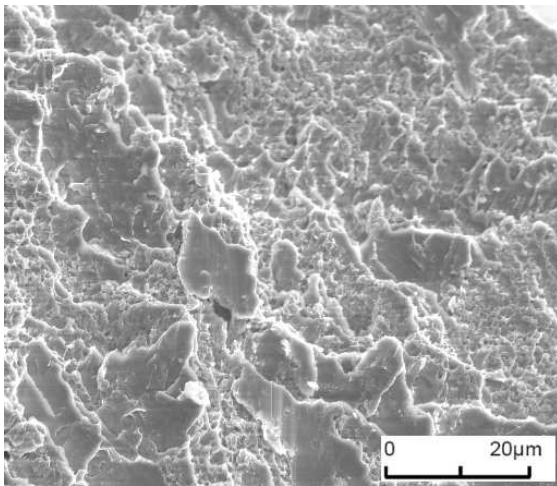
5.6.3 Bilder der Bruchflächen

Die Bruchflächen der SPT-Proben, insbesondere der spröde gebrochenen, wurden mit dem Rasterelektronenmikroskop (REM) untersucht. Die Orte der Rissinitiierung konnten nicht identifiziert werden, dennoch liefern die Bilder der Bruchflächen wertvolle Informationen.

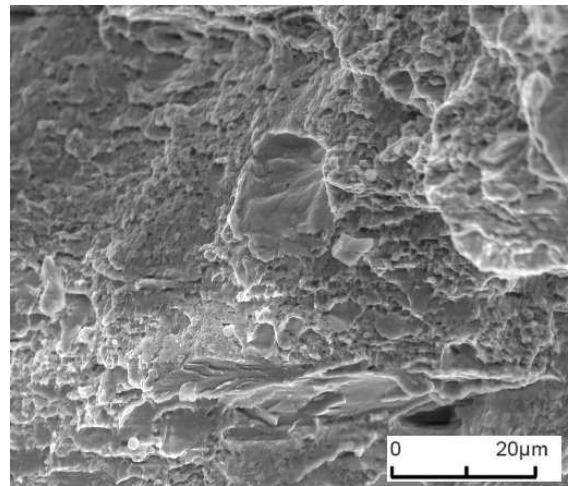
Die Bruchflächenbilder von 18Ch2MFA (Abb. 5.19) und 22NiMoCr37 (Abb. 5.20) bestätigen den Befund aus den F - u -Kurven über den Übergang vom duktilen zum spröden Bruchverhalten. Der Stahl 22NiMoCr37 zeigt bei -154°C noch Mischbruchverhalten (Waben- und Spaltbruch), jedoch mit überwiegendem Spaltbruchanteil, erst bei tieferer Prüftemperatur tritt reiner Spaltbruch auf. Allerdings zeigen die Proben bei -154°C unterschiedliche Spaltbruchanteile. Ähnliches gilt für 18Ch2MFA, wobei bei -140°C der Wabenbruchanteil bereits verschwindend gering ist. Eine quantitative Analyse wurde jedoch nicht durchgeführt. Zusätzliche Informationen über den verformten Querschnitt bei drei tiefen Temperaturen liefern die Überblicksbilder in Abbildung 5.19. Die in der F - u -Kurve beobachtete verminderte maximale Stempelverschiebung bei Bruch infolge der Temperaturversprödung kann auch im geringer verformten Querschnitt der Proben beobachtet werden. Bei höheren Temperaturen als -140°C zerbrachen die Proben nicht in Einzelteile, es bildete sich lediglich ein in Umfangsrichtung wachsender Riss. Der verformte Probenquerschnitt kann dann nur durch das Einbetten der Probe und Anfertigen eines Makroschliffes sichtbar gemacht werden, wie es Abbildung 5.14 zeigt.

Die Bruchflächenaufnahme der Keramik in Abbildung 5.21(a) zeigt einen gestreckten Hohlraum von etwa $10\,\mu\text{m}$ Länge, der die mittlere Korngröße von etwa $3\,\mu\text{m}$ deutlich übersteigt. Hohlräume unterschiedlicher Größe zeichnen sich auf der Bruchfläche als Polygonzug ab, die Form variiert von kompakt bis langgestreckt. Die räumliche Ausdehnung kann nicht vermessen werden. Erschwerend für die Suche nach der bruchauslösenden Fehlstelle kommt hinzu, dass diese sich mit der höchsten Wahrscheinlichkeit in der Spaltbruchebene erstreckt, also eben nicht als Kerbe oder Risspalt sichtbar ist. Bei üblichen lichtoptischen Vergrößerungen (Abb. 5.21(b)) sind diese Fehlstellen praktisch nicht sichtbar.

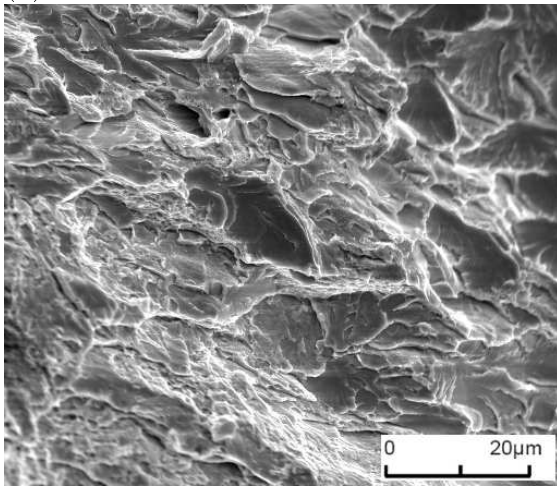
(a) $-140\text{ }^{\circ}\text{C}$, $2000\times$ (b) $-140\text{ }^{\circ}\text{C}$, Überblick, $20\times$ (c) $-160\text{ }^{\circ}\text{C}$, $2000\times$ (d) $-160\text{ }^{\circ}\text{C}$, Überblick, $20\times$ (e) $-180\text{ }^{\circ}\text{C}$, $2000\times$ (f) $-180\text{ }^{\circ}\text{C}$, Überblick, $20\times$ **Abbildung 5.19:** REM, Spaltbruchflächen der SPT-Proben aus 18Ch2MFA



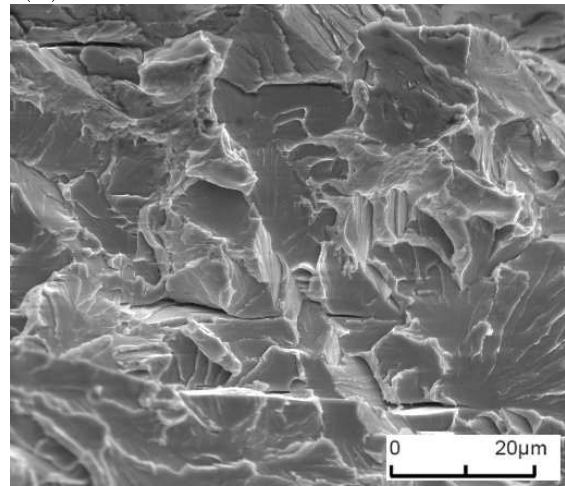
(a) $-91\text{ }^{\circ}\text{C}$, $1000\times$, Wabenbruch



(b) $-110\text{ }^{\circ}\text{C}$, $1000\times$, Waben+Spaltbruch

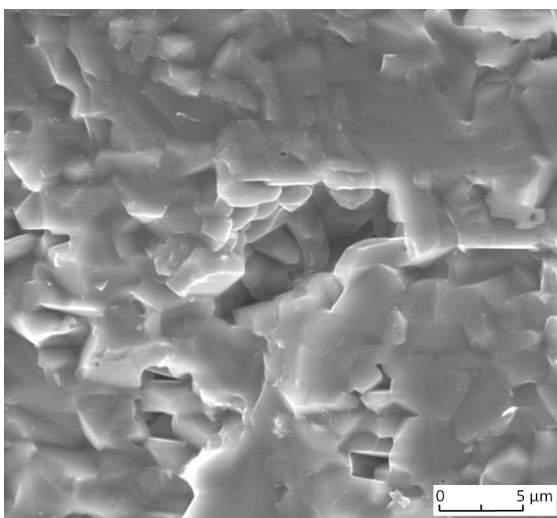


(c) $-154\text{ }^{\circ}\text{C}$, $1000\times$, Spalt+Wabenbruch

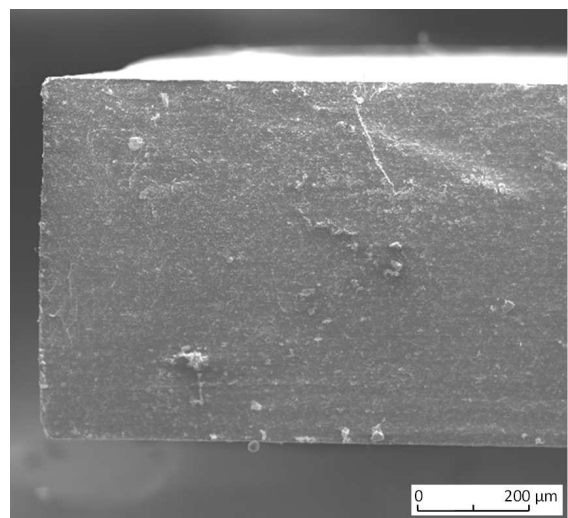


(d) $-191\text{ }^{\circ}\text{C}$, $1000\times$, Spaltbruch

Abbildung 5.20: REM, duktile bis spröde Bruchflächen der SPT-Proben aus 22NiMoCr37



(a) $3000\times$, Hohlraum der Länge $10\text{ }\mu\text{m}$



(b) $100\times$, Blick auf Probenmitte

Abbildung 5.21: REM, Spaltbruchflächen der SPT-Proben aus Rubalit 708S

6 FEM-Simulation des SPT

Die Modellierung und Simulation des SPT erfolgte mit der Finite-Elemente-Software ABAQUS in den Versionen 6.7 und 6.9 [DSS09], wobei der ABAQUS/Standard-Solver verwendet wurde. Für den SPT kann aufgrund seiner axialsymmetrischen Geometrie und Belastung ein 2D-Modell verwendet werden. Ein Gesamtmodell des Versuchs diente zunächst der Berechnung der Steifigkeit der gesamten SPT-Apparatur (Abschnitt 6.1). Mit einem vereinfachten Modell (Abschnitt 6.2) wurde dann der Einfluss der Modellparameter untersucht (Abschnitt 6.3). Das vereinfachte Modell bildet auch die Grundlage für die Identifikation der konstitutiven Materialparameter und der probabilistischen Spröbruchparameter. Für die Berechnung des Spannungsintensitätsfaktors an der Rissfront der SPT-Keramikproben mit Indenterriss ist allerdings ein aufwendigeres 3D-Modell erforderlich, es wird an späterer Stelle im Kapitel 9 beschrieben.

6.1 Gesamtmodell des Versuchs

Die Probenverformung wird indirekt über die Verschiebung des Stempels gemessen. Der mit der Bodenplatte der SPT-Apparatur verbundene Wegmesstaster erfasst die relative Verschiebung der auf den Stempel drückenden Platte bezüglich der Bodenplatte. Die gemessene Verschiebung enthält also sowohl die Verformung der Probe als auch die elastische Nachgiebigkeit der SPT-Apparatur. Die Bestimmung von Materialkennwerten aus der gemessenen Kraft-Verschiebungs-Antwort erfordert eine saubere Trennung zwischen Proben- und Apparaturverformung. Die möglichst genaue Bestimmung der Apparaturnachgiebigkeit als Funktion der Stempelkraft wird insbesondere bei kleinen Probenverformungen und Kräften sehr wichtig. Zu diesem Zweck wurde für jede der drei verwendeten SPT-Konfigurationen, die sich in den Abmessungen und der elastischen Materialsteifigkeit von Stempel und Matrize unterscheiden (siehe Kapitel 5), jeweils ein axialsymmetrisches FE-Modell der gesamten Versuchsanordnung erstellt. Es wurden axialsymmetrische 8-Knoten-Viereckselemente mit quadratischem Verschiebungsansatz und reduzierter Integration (Elementtyp CAX8R) verwendet. Das Modell enthält alle Teile im Kraftfluss, die in die Wegmessung u_{mess} mit dem induktiven Wegaufnehmer eingehen (siehe Abbildung 6.1). Von Interesse ist jedoch nur die relative Bewegung u_{SPT} der Stempelspitze

bezüglich der Probenauflage (Matrize). Die Bauteile der Apparatur werden als elastisch angesehen, das Gleiche gilt für den Kontakt zwischen den Apparaturbauteilen. Die Apparaturnachgiebigkeit kann man sich daher als eine Reihenschaltung von Federn denken, die in vertikaler Richtung angeordnet sind, lineare Federn für die Bauteile, nichtlineare Federn für die Kontaktbereiche. Die Summe aus den elastischen Federwegen s_i und der inelastischen Probenverformung u_{SPT} ergibt die gemessene Gesamtverschiebung

$$u_{\text{mess}} = \sum_i s_i + u_{\text{SPT}}. \quad (6.1)$$

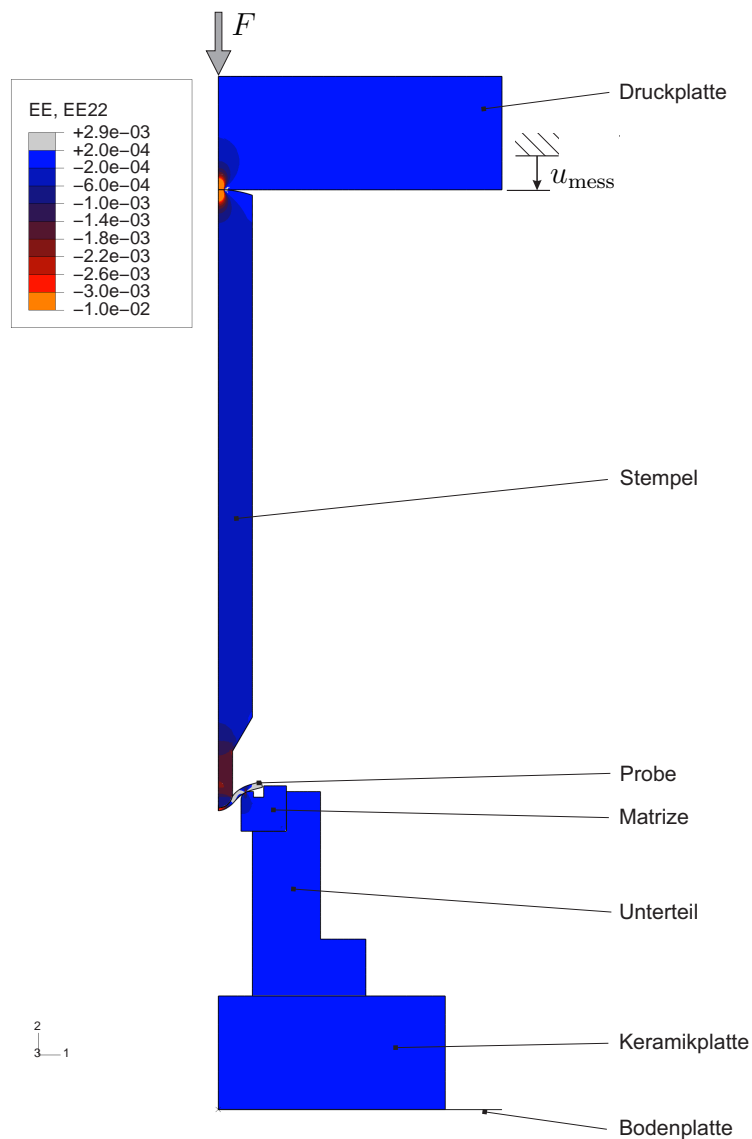


Abbildung 6.1: Axialsymmetrisches FE-Modell der SPT-Apparatur (Konfiguration 1) mit allen Bauteilen im Kraftfluss, die zur gemessenen Verformung beitragen (Reihenschaltung von Ersatzfedern). Konturdarstellung der elastischen Dehnungen in vertikaler Richtung bei einer Stempelkraft von 1752 N

6.1.1 Modellierung der Kontaktsteifigkeit

Maßgebend für die Apparurnachgiebigkeit ist die Kontaktsteifigkeit. ABAQUS hat verschiedene Kontaktgesetze implementiert. Es wurde eine nichtlineare Formulierung verwendet, bei der die Kontaktsteifigkeit mit zunehmender Annäherung der Kontaktflächen exponentiell ansteigt. Auf diese Weise wird der fertigungsbedingt nicht völlig vermeidbaren Oberflächenrauheit und -welligkeit der Kontaktflächen Rechnung getragen. Der Kontaktdruck p berechnet sich in Abhängigkeit der Überschneidung c der Kontaktflächen:

$$p(c) = \begin{cases} 0 & \text{für } c \leq -c_0 \\ \frac{p_0}{\exp(1) - 1} \left(\frac{c}{c_0} + 1 \right) \left(\exp \left(\frac{c}{c_0} + 1 \right) - 1 \right) & \text{für } c > -c_0 \end{cases} \quad (6.2)$$

Der Parameter c_0 bezeichnet den positiven Abstand zweier Kontaktflächen, bei dem die Normalspannung gerade verschwindet, p_0 den Kontaktdruck beim Abstand Null. Im unverformten Anfangszustand der Simulation werden die Apparaturbauteile im Abstand c_0 positioniert. Im ABAQUS-Inputfile wird die Formulierung zur Berechnung der Kontaktnormalspannungen mit folgenden zwei Zeilen definiert:

```
*Surface Behavior, pressure-overclosure=EXPONENTIAL
<c0>, <p0>
```

Um eine gute Anpassung der Simulation an Messergebnisse zu erreichen wurden mehrere Variantenrechnungen durchgeführt und schließlich folgende Modellparameter gewählt:

- $p_0 = 1000 \text{ MPa}$, $c_0 = 0,002 \text{ mm}$ für Punktkontakt,
- $p_0 = 1000 \text{ MPa}$, $c_0 = 0,01 \text{ mm}$ für Linien- und Flächenkontakt.

Punktkontakt herrscht zu Beginn der Belastung zwischen der halbkugelförmigen Stempelspitze und der Probe sowie dem gekrümmten oberen Ende des Stempels und der Druckplatte, der natürlich mit zunehmender Last in einen flächigen Kontakt übergeht.

Über die Definition von COULOMBScher Reibung mit dem Reibungskoeffizienten $\mu = 0,2$ werden tangential Kontaktspannungen modelliert. Auf den elastischen Kontakt zwischen den Apparaturbauteilen hat die Reibung nur einen geringen Einfluss, weil tangential Relativbewegungen praktisch vernachlässigbar sind. Der Einfluss der Reibung auf die Probenverformung wird im Abschnitt 6.3 untersucht.

6.1.2 Approximation der Apparurnachgiebigkeit

Die berechnete Apparaturverformung $\sum_i s_i = u_{\text{mess}} - u_{\text{SPT}}$ in Abhängigkeit der Stempelfkraft F für die Konfiguration 1 zeigt Abbildung 6.2. Die Bauteile der Apparatur wurden

als linearelastisch modelliert. Es wurden die elastischen Konstanten für Stahl $E = 210$ GPa und $\nu = 0,3$ verwendet. Abweichend dazu wurden für den Stempel und die Matrice aus Hartmetall in Konfiguration 3 die Werte $E = 600$ GPa und $\nu = 0,22$ verwendet. Um die elastische Nachgiebigkeit zu approximieren, wurde die zweiteilige Ansatzfunktion

$$\frac{\Delta u(F)}{\text{mm}} = a_1 \cdot \left(\frac{F}{N} \right)^{a_2} + a_3 \cdot \frac{F}{N} \quad (6.3)$$

mit den drei Freiwerten a_1 , a_2 und a_3 gewählt. Während der nichtlineare Anteil die Verformung der Kontaktzonen berücksichtigt, umfasst der lineare Anteil die elastischen Deformationen der Bauteile außerhalb der Kontaktbereiche. Mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate wurden die Parameter für alle drei Konfigurationen gefittet, sie sind in Tabelle 6.1 zusammengefasst.

Tabelle 6.1: Fitparameter für die Apparaturnachgiebigkeit nach Gl. (6.3)

Konfiguration	Anwendung	a_1	a_2	a_3
1:	Stahlproben	$3,076 \cdot 10^{-4}$	0,5928	$1,361 \cdot 10^{-5}$
2:	Keramikproben	$2,218 \cdot 10^{-4}$	0,6296	$1,377 \cdot 10^{-5}$
3:	Keramikproben mit Riss	$4,711 \cdot 10^{-4}$	0,5218	$5,143 \cdot 10^{-6}$

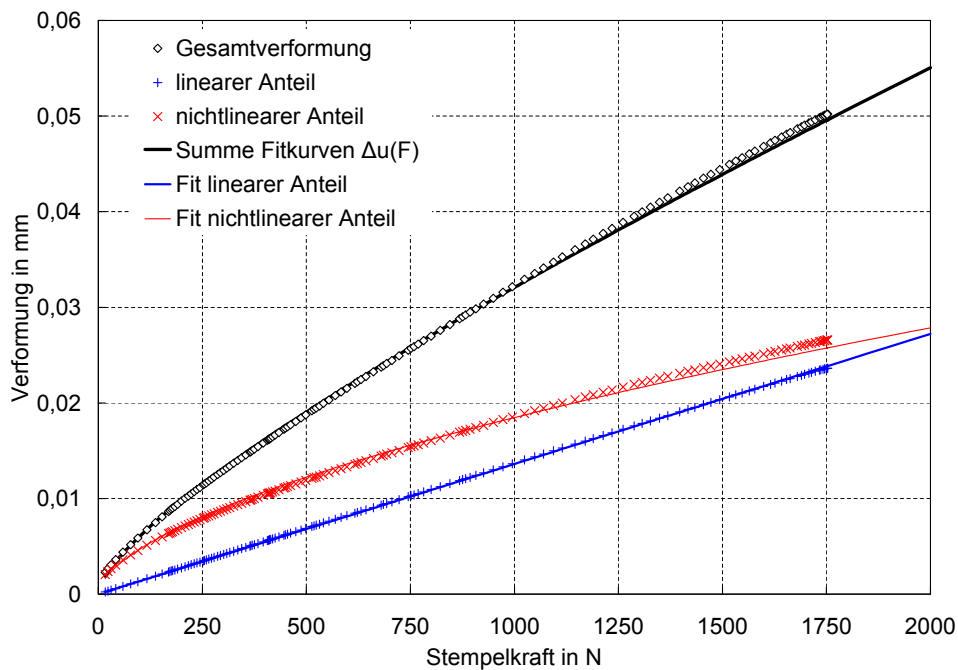


Abbildung 6.2: Berechnete Nachgiebigkeit der Small-Punch-Apparatur (Konfiguration 1)

Die Auswirkung der Apparaturnachgiebigkeit auf die Kraft-Verschiebungs-Kurve verdeutlicht Abbildung 6.3. Für die Small-Punch-Probe wurden typische elastisch-plastische

Materialkennwerte eines höherfesten Stahles mit isotroper Verfestigung angenommen ($E = 210 \text{ GPa}$, $\nu = 0,3$, Fließkurve aus Tabelle 6.2).

Tabelle 6.2: Referenzfließkurve der SPT-Probe für Parameterstudien

σ_F / MPa	500	600	700	800	900
$\varepsilon_V^{\text{pl}}$	0	0,03162	0,1	0,3162	1,0

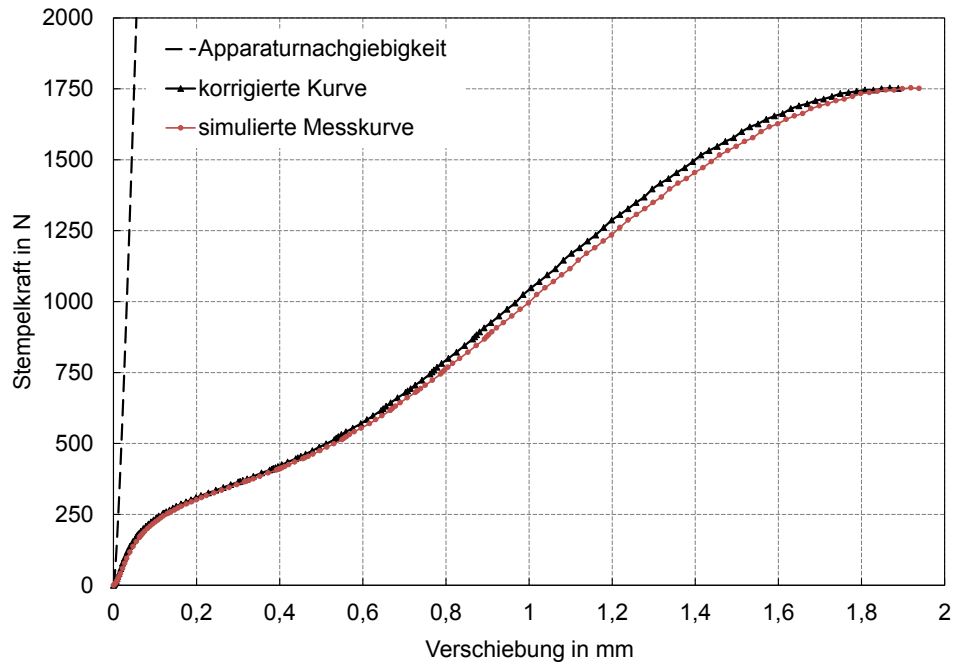


Abbildung 6.3: Auswirkung der Apparurnachgiebigkeit auf die Kraft-Verschiebungs-Kurve

6.2 Vereinfachtes Modell

Für die weiteren Berechnungen wurde das axialsymmetrische FE-Modell radikal vereinfacht, um Rechenzeit und notwendige Speicherressourcen zu verringern. Es besteht nunmehr nur aus der Small-Punch-Probe, der Stempelspitze und der Matrizenauflage (Abbildung 6.4). Stempelspitze und Matrize wurden außerdem als starre Körper modelliert. Wie schon beim Gesamtmodell wurde die Probe mit den quadratischen Viereckselementen CAX8R vernetzt. Die Elementkantenlänge beträgt $0,05 \text{ mm}$. Die Kontaktsteifigkeit und Reibung wurde wie zuvor beim Gesamtmodell modelliert. Als unsicherste Größe im FE-Modell ist der Reibungskoeffizient μ zu nennen, dessen Einfluss im nächsten Abschnitt untersucht wird.

Für den Vergleich zwischen gemessener und simulierter Kraft-Verschiebungs-Kurve muss die Apparurnachgiebigkeit berücksichtigt werden. Der gemessene Stempelweg u_{mess} wur-

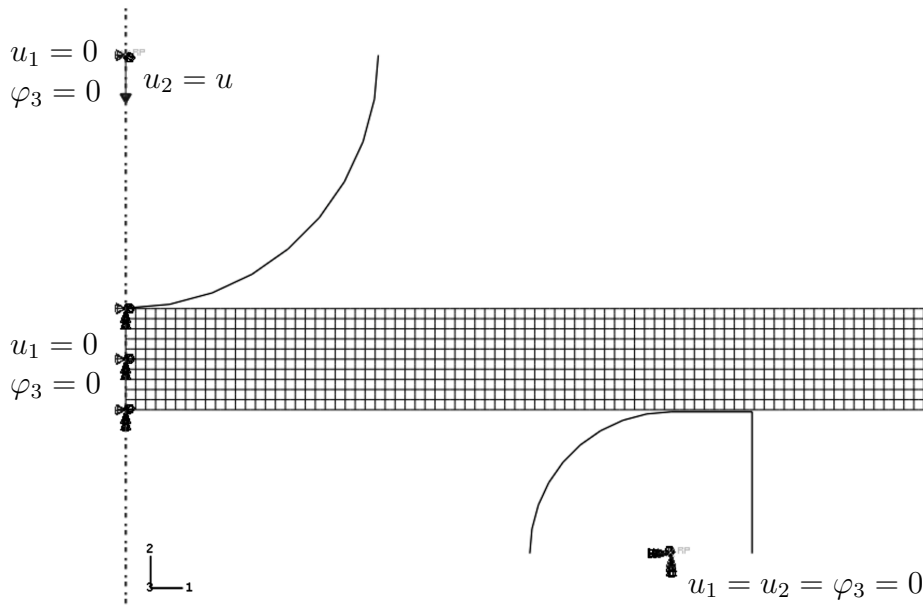


Abbildung 6.4: Vereinfachtes FE-Modell des SPT mit starrem Stempel und starrer Matrice mit den kinematischen Randbedingungen (horizontale und vertikale Verschiebung u_1 und u_2 , Verdrehung φ_3)

de in Abhängigkeit der gemessene Stempelkraft F_{mess} mit der zuvor ermittelten Funktion $\Delta u(F)$ korrigiert:

$$u = u_{\text{mess}} - \Delta u(F_{\text{mess}}). \quad (6.4)$$

Das Prinzip verdeutlicht bereits Abbildung 6.3. Der Unterschied zwischen der Kraft-Verschiebungs-Kurve des Gesamtmodells, welche mit Gleichung (6.4) korrigiert wurde, und der des vereinfachten Modells ist verschwindend gering, wie Abbildung 6.5 zeigt. Für alle nachfolgenden FE-Simulationen wurde nur noch das vereinfachte Modell verwendet. Als Reibungskoeffizient wurde $\mu = 0,2$ angenommen.

Zusätzlich zur gemessenen Kraft der Prüfmaschine lastet der Stempel mit seinem Gewicht auf der Probe, weshalb dessen Gewichtskraft zur gemessenen Kraft addiert werden muss. Als F - u -Kurve wird hiermit der Zusammenhang zwischen der Stempelkraft $F = F_{\text{SPT}} = F_{\text{mess}} + m_{\text{Stempel}} \cdot g$ und der Relativverschiebung $u = u_{\text{SPT}} = u_{\text{mess}} - \Delta u(F)$ definiert. Die gehärteten Stempel aus Stahl, welche für alle Versuche mit den metallischen Proben und die Versuche zur Bestimmung der Festigkeit von Keramik verwendet wurden, haben eine Masse von 12 g, was einer Gewichtskraft von 0,118 N entspricht. Die Versuche an Keramikproben mit Indenterriss wurden mit einem Stempel aus Hartmetall durchgeführt. Er hat eine Masse von 20 g, was einer Gewichtskraft von 0,196 N entspricht. Die Masse des Stempels macht demzufolge nur einen verschwindend geringen Anteil der gemessenen Bruchkräfte zwischen 40 N und 2500 N aus (zwischen 0,5 % und 0,004 %) und könnte praktisch vernachlässigt werden, sie wurde jedoch in der Auswertung berücksichtigt.

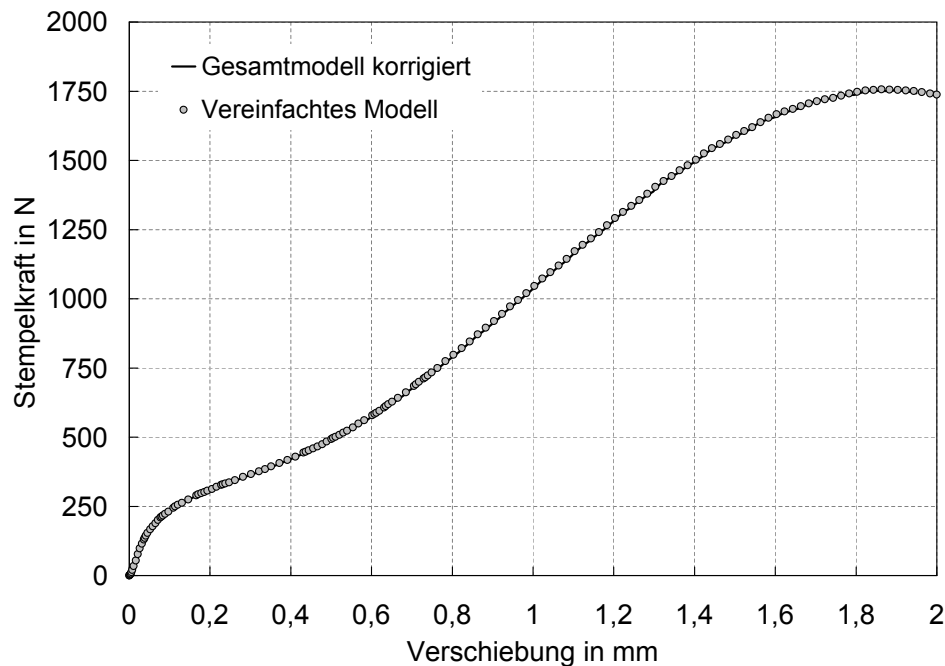


Abbildung 6.5: Vergleich der simulierten Kraft-Verschiebungs-Kurven von Gesamtmodell und vereinfachtem Modell bei Berücksichtigung der Apparurnachgiebigkeit

6.3 Parameterstudie

Für das vereinfachte FEM-Modell wurde eine parametrisierte ABAQUS-Inputdatei erzeugt (Anhang A.3.3). Um den Einfluss verschiedener Modellparameter auf das Versuchsergebnis zu studieren, wurden diese einzeln variiert und die Simulationsergebnisse geplottet. Die Referenzkurve ist in allen Diagrammen als durchgezogene rote Linie dargestellt.

6.3.1 Parametervariation bei elastischem Material

Die Abbildungen 6.6 und 6.7 zeigen für linearelastisches Materialverhalten die Änderung der Kraft-Verschiebungs-Kurve bei der Variation der Probenabmessungen (Probendurchmesser D , Probendicke h , Stempelradius R , Tiefziehradius r), der elastischen Konstanten E und ν , des Reibwertes μ und der Elementgröße. Zusätzlich wurde über der Stempelkraft die maximale Zugspannung σ_{\max} in der Mitte der Probenunterseite aufgetragen. Die Modellparameter des Referenzmodells sind in Tabelle 6.3 zusammengefasst.

Tabelle 6.3: Modellparameter des elastischen Referenzmodells

R (mm)	r (mm)	h (mm)	D (mm)	μ	E (GPa)	ν
2,5	0,5	0,6	8,0	0,2	340	0,25

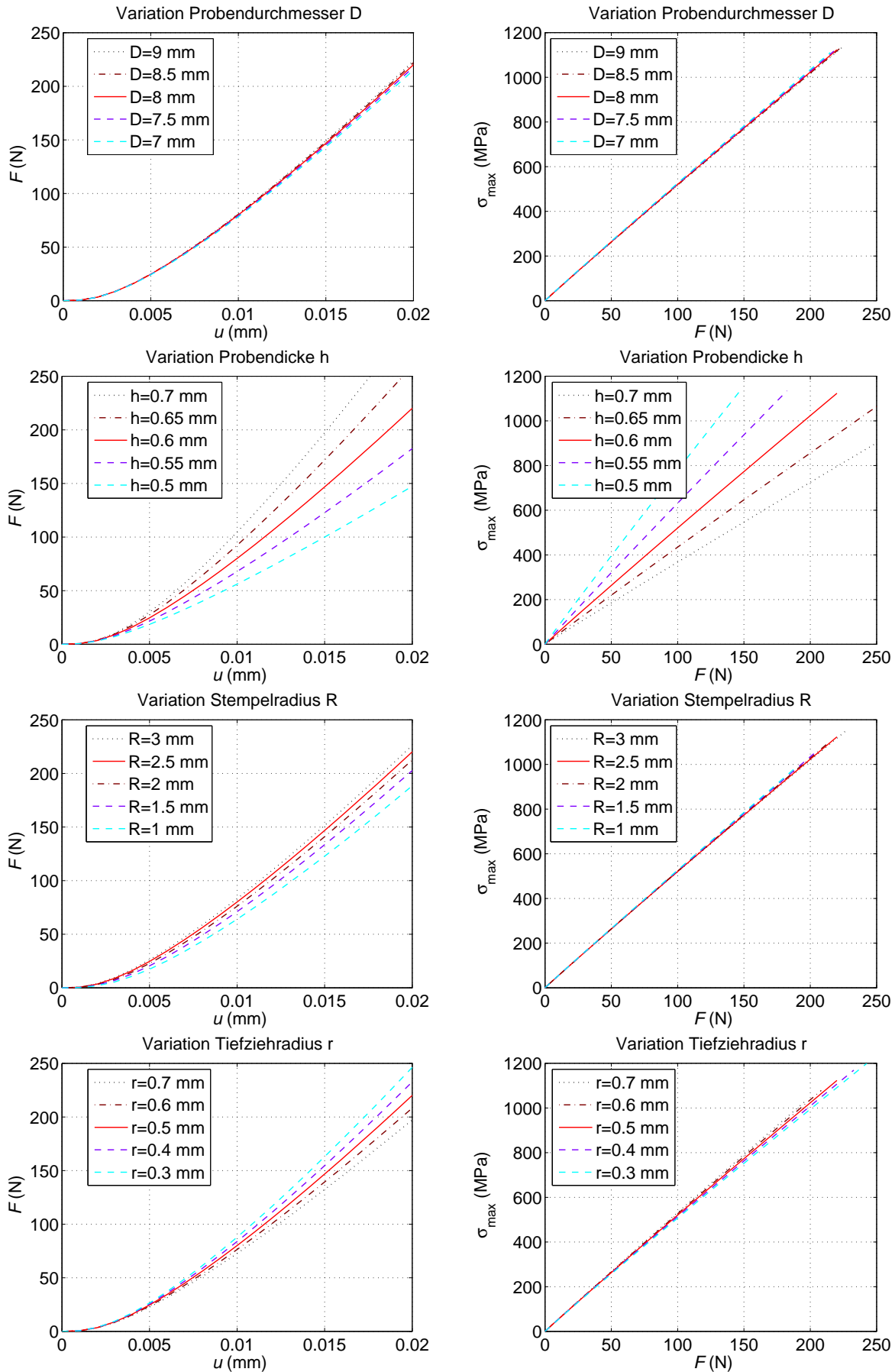


Abbildung 6.6: Einfluss der Probenabmessungen auf die F - u -Kurve und die maximale Hauptspannung im SPT bei linearelastischem Material (Auflageradius = Bohrungsdurchmesser + Tiefziehradius)

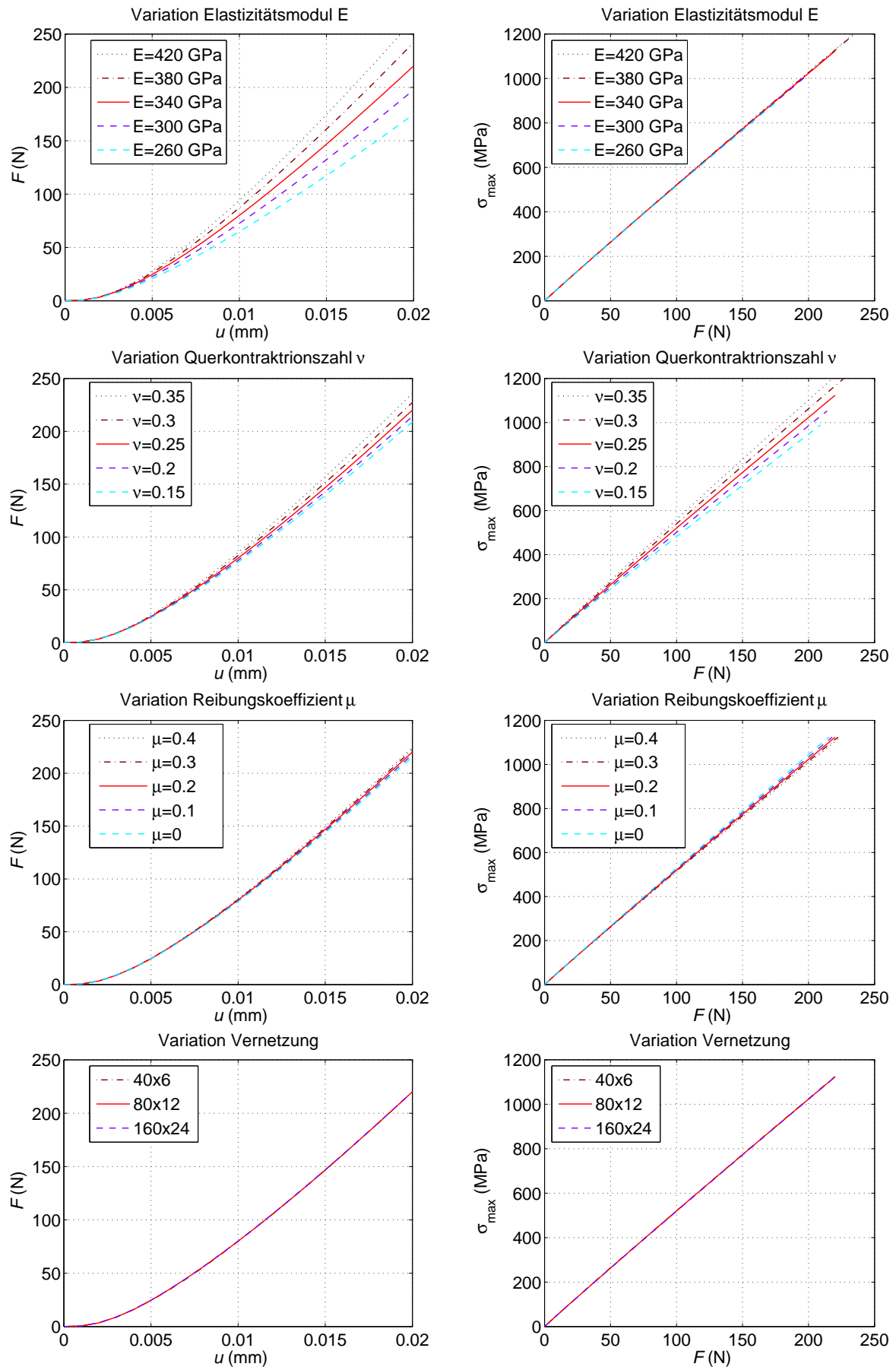


Abbildung 6.7: Einfluss der elastischen Konstanten, des Reibungskoeffizienten und der Elementgröße auf die F - u -Kurve und die maximale Hauptspannung im SPT bei linearelastischem Material

Die F - u -Kurve reagiert am empfindlichsten auf Änderungen der Probendicke und des Elastizitätsmoduls. Ebenso nicht vernachlässigbar sind der Einfluss des Stempelradius, des Tiefziehradius und der Querkontraktionszahl. Der Probendurchmesser und die Reibung spielt dagegen eine vernachlässigbare Rolle. Auf die maximale Spannung wirkt sich am stärksten die Probendicke aus. Den zweitgrößten Einfluss besitzt die Querkontraktionszahl. Reibung und Tiefziehradius wirken sich demgegenüber vernachlässigbar wenig auf die maximale Zugspannung aus, die restlichen Parameter besitzen praktisch keinen Einfluss. Die Probendicke muss von allen geometrischen Parametern am genauesten gemessen werden, um Fehler bei der Spannungsberechnung zu vermeiden. Der Reibungskoeffizient wirkt sich nur minimal auf die F - u -Kurve und die Spannungsberechnung aus, allerdings ist sein Wert auch der unsicherste Modellparameter.

Es zeigt sich, dass nur eine schwach nichtlineare Abhängigkeit der Kurvenverläufe von den Modellparametern existiert. Dieser erfreuliche Umstand wird dadurch begünstigt, dass aufgrund der kleinen elastischen Verformungen Spannungsumlagerungen in der Probe infolge der Laststeigerung vernachlässigbar klein sind. Ausgehend von dem Referenzmodell können daher die Abhängigkeiten in guter Näherung durch lineare oder quadratische Beziehungen approximiert werden. Die Stempelkraft kann dazu genutzt werden, die maximale Biegespannung in einer SP-Probe der Dicke h mit der Beziehung

$$\sigma_{\max} = f(\nu, R, r, \mu) \cdot \frac{F}{h^2} \quad (6.5)$$

zu berechnen. f ist ein dimensionsloser Faktor, welcher von der Querkontraktionszahl ν des Probenmaterials, der Belastungsgeometrie (R und r) und der Reibungszahl μ abhängt. f lässt sich einfach durch Einsetzen der FE-Lösung für die maximale Biegespannung berechnen. Der Vorteil dieser Beziehung liegt darin, dass die FE-Simulation nur einmal für die vorliegende Versuchskonfiguration durchgeführt werden muss um den Faktor zu kalibrieren und anschließend die maximale Biegespannung sehr simpel berechenbar ist. Für die geprüften Keramikproben mit einer Probendicke von 0,6 mm und einer Querkontraktionszahl von 0,25 beträgt der Wert $f = 1,9$. Prinzipiell ließe sich der Faktor durch eine Linearkombination der vier relevanten Einflussfaktoren ausdrücken und somit eine empirisch gefittete Handformel für verschiedene Geometrien und Werkstoffe angeben, was zukünftig die Auswertung für elastische Materialien erheblich vereinfachen würde. Weil in dieser Arbeit jedoch nur ein keramischer Werkstoff mit zwei Geometrievarianten getestet wurde und ein parametrisiertes FE-Modell vorliegt, bei dem alle genannten Einflussfaktoren exakt eingestellt werden können, wurde eine solche Handformel bisher nicht entwickelt. Jedoch stellt dies eine sinnvolle Aufgabe dar, um den SPT als einfach anzuwendende Festigkeitsprüfmethode für elastische Werkstoffe zu etablieren.

6.3.2 Parametervariation bei elastisch-plastischem Material

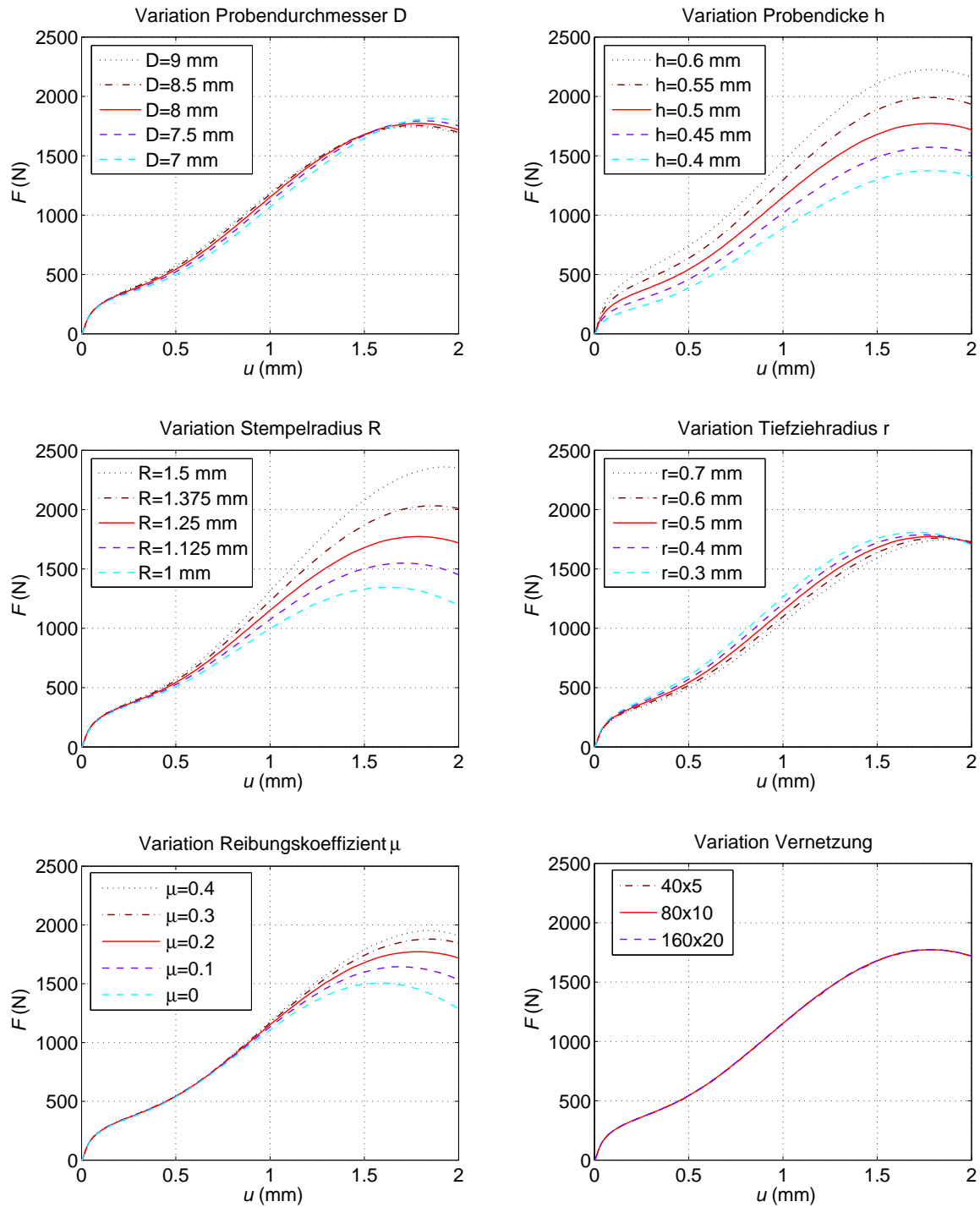
Die Abbildungen 6.8 und 6.9 zeigen für elastisch-plastisches Material die Änderung der Kraft-Verschiebungs-Kurve bei der Variation der elastischen Konstanten E und ν , der Anfangsfließgrenze σ_{F0} , der Probenabmessungen D und h , des Stempelradius R , des Tiefziehradius r , des Reibungskoeffizienten μ sowie der Vernetzung (Elementkantenlänge). Die Verfestigungskurve $R(\varepsilon_V^{\text{pl}})$ wurde nicht verändert und entspricht der Verfestigung der Referenzfließkurve in Tabelle 6.2. Die Modellparameter des Referenzmodells sind in Tabelle 6.4 zusammengefasst. Die Referenzkurve ist in den folgenden Diagrammen wieder als durchgezogene rote Linie dargestellt. Eine vergleichbare Parameterstudie für den SPT mit Niederhalter (bei gleicher Probengeometrie und mit Berücksichtigung duktiler Schädigung) wurde von Abendroth [Abe04] durchgeführt. Auch ohne Niederhalter weist die F - u -Kurve des SPT die gleiche Tendenz bezüglich der hier variierten Parameter auf. Den direkten Vergleich mit/ohne Niederhalter liefert Abbildung A.4 im Anhang.

Zusätzlich wurde in Abbildung 6.10 die maximale Spannung auf der Zugseite der Probe über der Verschiebung und der Stempelkraft für verschieden feine Netze aufgetragen. Obwohl die größte Vernetzung mit $100\,\mu\text{m}$ Kantenlänge bereits ausreicht, um die F - u -Kurve abzubilden – eine Netzverfeinerung zeigt keine Änderung – sind die berechneten Spannungen empfindlicher bezüglich der Netzfeinheit. Zwischen den Netzen mit $100\,\mu\text{m}$ (40×5) und $50\,\mu\text{m}$ (80×10) sind deutliche Abweichungen bei der maximalen Spannung erkennbar. Eine weitere Halbierung der Elementkantenlänge auf $25\,\mu\text{m}$ (160×20) bewirkt keine Änderung mehr. Die Vernetzung mit 10 Elementen über der Probendicke (Abb. 6.4) ermöglicht bereits eine sehr gute Auflösung der Spannungsverteilung in der Probe, das zeigen auch die Abbildungen A.5 und A.6 im Anhang, welche die Spannungsverteilung beim SPT mit und ohne Niederhalter vergleichen.

Die Abbildungen 6.11 und 6.12 zeigen den Einfluss der Reibung und des Probendurchmessers auf den verformten Probenquerschnitt und die Mises-Vergleichsspannung σ_{Mises} in der FE-Simulation bei einer Stempelverschiebung von 2 mm. Vergleicht man die simulierten Querschnitte mit dem Querschliff der verformten SPT-Probe in Abbildung 5.14, so zeigt sich für $\mu = 0,2$ eine gute Übereinstimmung. Mit Hilfe eines Querschliffs der verformten Probe kann der Reibungskoeffizient der Paarung Stempel-Probe kalibriert werden. Der Reibungskoeffizient zwischen Matrize und Probe wirkt sich aufgrund des Überhangs von Probenmaterial weniger auf den verformten Querschnitt aus. Der Probendurchmesser hat einen verschwindend geringen Einfluss auf die Probenverformung unter dem Stempel, allerdings begünstigt ein kleinerer Durchmesser die Verformung des Probenrandes, der dann stärker hochklappt. Bei zunehmender Vergrößerung des Probendurchmessers verringert sich die Verformung des Probenrandes und ähnelt zunehmend der Verformung bei der Versuchsanordnung mit Niederhalter.

Tabelle 6.4: Modellparameter des elastisch-plastischen Referenzmodells

R (mm)	r (mm)	h (mm)	D (mm)	μ	E (GPa)	ν	σ_{F0} (MPa)
1,25	0,5	0,5	8,0	0,2	200	0,3	500

**Abbildung 6.8:** Einfluss der Probenabmessungen D und h , des Stempelradius R , des Tiefziehradius r , des Reibungswertes μ und der Vernetzung auf die F - u -Kurve im SPT bei elastisch-plastischem Material

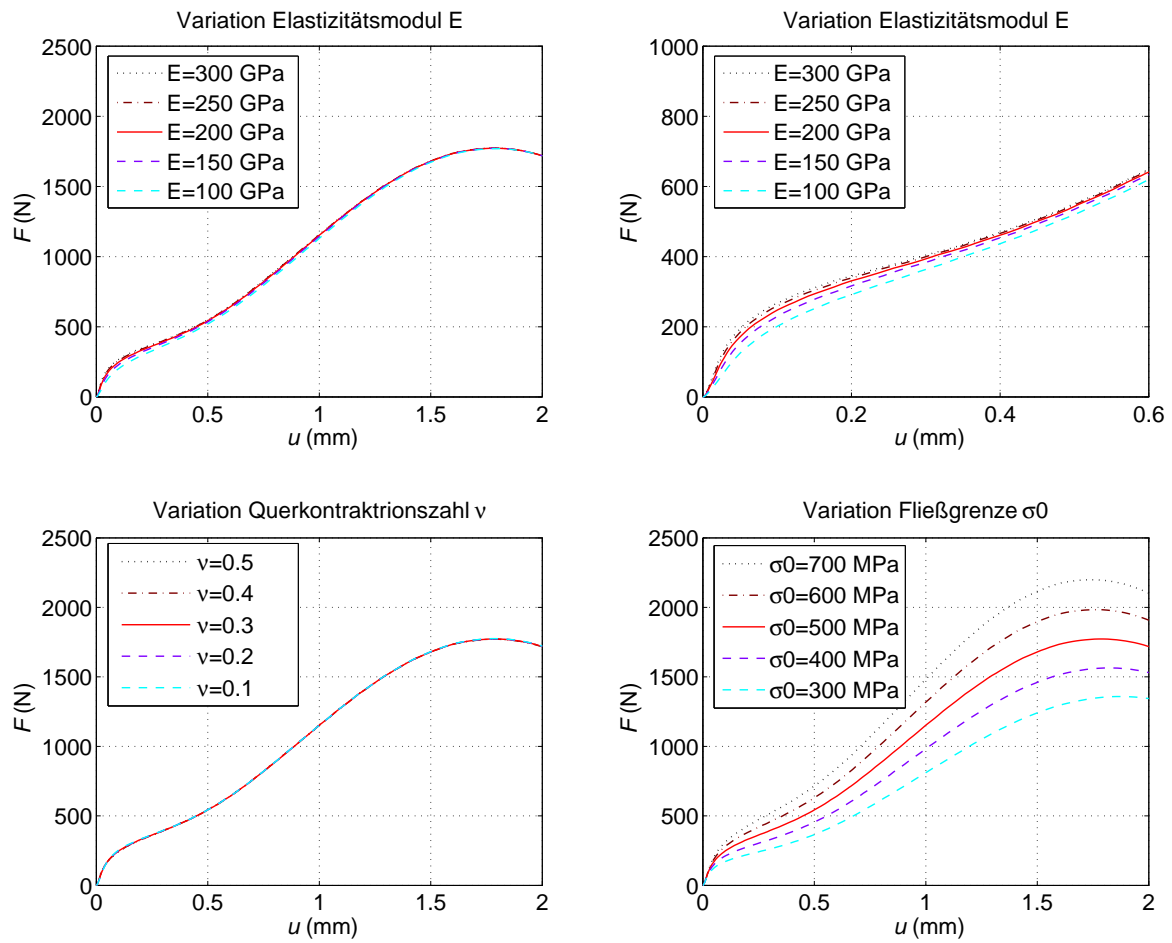


Abbildung 6.9: Einfluss der elastischen Konstanten E und ν und der Anfangsfließgrenze σ_{F0} (Verfestigungskurve $R(\varepsilon_V^{pl})$ unverändert) auf die F - u -Kurve im SPT bei elastisch-plastischem Material

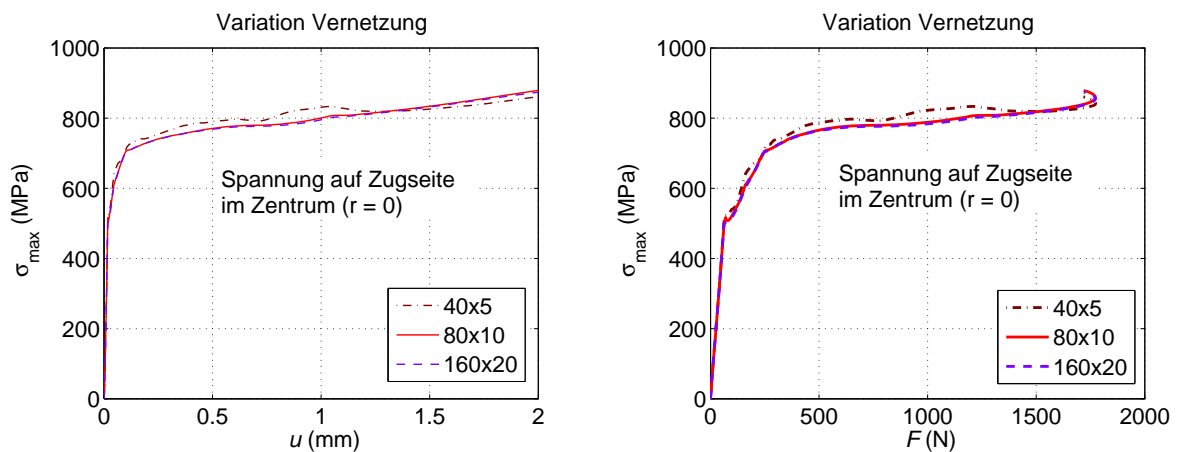


Abbildung 6.10: Maximale Hauptspannung in der SP-Probe über der Verschiebung und der Stempelkraft in Abhängigkeit der Elementgröße ($40 \times 5 : 100 \mu\text{m}$, $80 \times 10 : 50 \mu\text{m}$, $160 \times 20 : 25 \mu\text{m}$) bei elastisch-plastischem Material

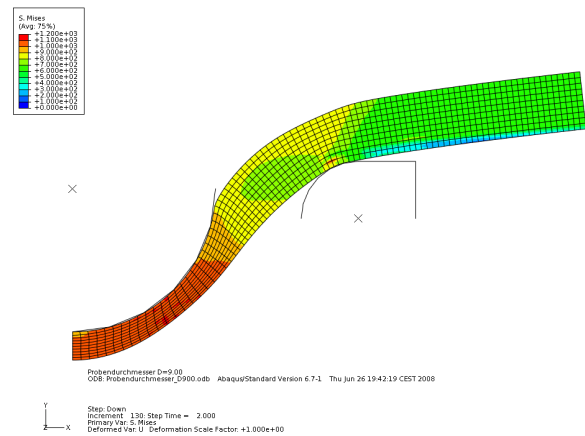
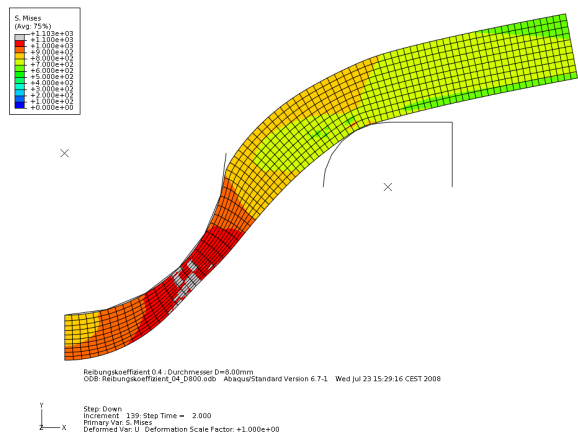
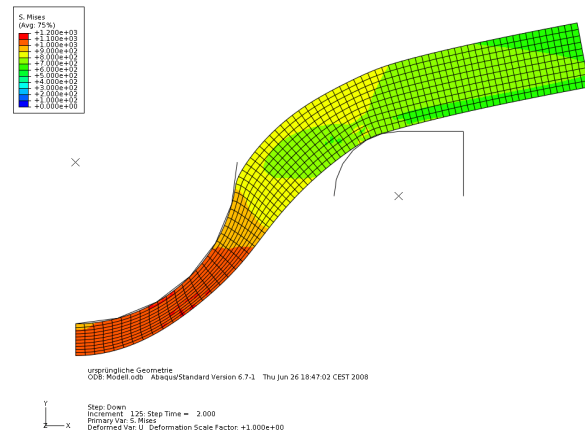
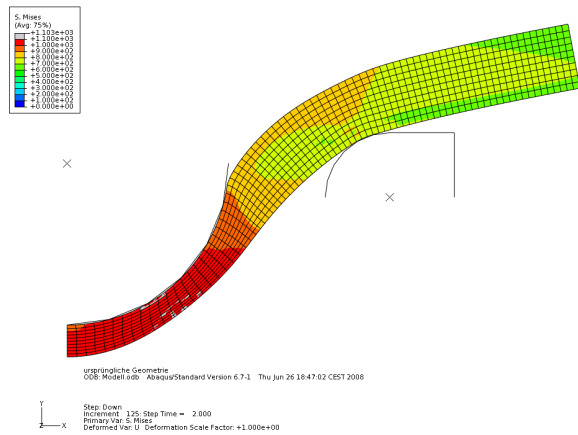
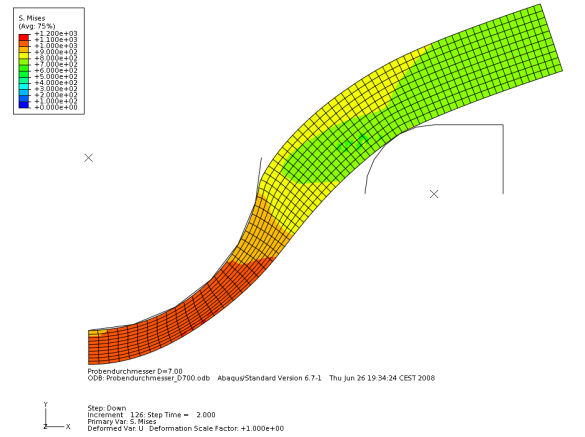
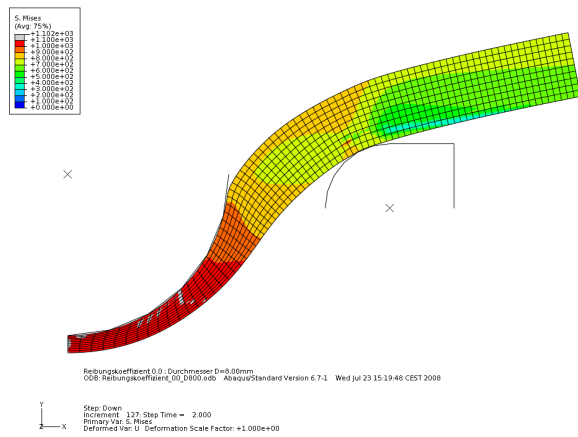


Abbildung 6.11: Verformter Probenquerschnitt und σ_{Mises} bei variiertem Reibwert (oben: $\mu = 0$, mittig: $\mu = 0,2$, unten: $\mu = 0,4$) für eine Stempelverschiebung von 2 mm

Abbildung 6.12: Verformter Probenquerschnitt und σ_{Mises} bei variiertem Probendurchmesser (oben: $D = 7$ mm, mittig: $D = 8$ mm, unten: $D = 9$ mm) für eine Stempelverschiebung von 2 mm

7 Identifikation der Fließkurve

7.1 Erläuterung der Vorgehensweise

Veränderungen der Fließgrenze eines Werkstoffs wirken sich deutlich erkennbar auf den Verlauf der Kraft-Verschiebungs-Kurve des SPT aus. Die bei verschiedenen Temperaturen gemessenen Kurven für Stahl (siehe Kapitel 5) zeigen diese Auswirkung. Deshalb soll die gemessene Materialantwort $F(u)$ für die Identifikation von Fließkurvenparametern genutzt werden. Im Abschnitt 4.2.2 wurde bereits ausgeführt, dass sich der SPT allerdings nur für die Bestimmung des isotropen Verfestigungsverhaltens eignet. Die sonst aus dem einachsigen Zugversuch bestimmte Fließkurve $\sigma_F(\varepsilon_V^{\text{pl}})$ liegt normalerweise tabelliert in Form von $\varepsilon_V^{\text{pl}}-\sigma_F$ -Wertepaaren vor. Für die Bauteilsimulation werden jedoch gern mathematische Funktionen verwendet, welche den realen Fließkurvenverlauf approximieren. Aus der Literatur sind verschiedene parametrische Ansätze der Form $\sigma_F(\varepsilon_V^{\text{pl}}, \mathbf{p})$ mit dem Parametervektor \mathbf{p} bekannt. Die Lösung des inversen Problems, d.h. die Bestimmung der n_p unbekannten Materialparameter p_i kann durch die Minimierung der Abweichung zwischen der gemessenen F - u -Kurve im SPT und der mit der FEM simulierten Kurve erfolgen. Weil sowohl Messwerte als auch die Ergebnisse der numerischen Simulation stets fehlerbehaftet sind, wird das Identifikationsproblem in ein nichtlineares Ausgleichsproblem überführt, welches mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate gelöst werden kann. Im Abschnitt 4.3.3 wurde bereits die zu minimierende Zielfunktion (4.89) formuliert, in die der relative Fehler der Stempelkraft für N diskrete Werte der Verschiebung u_k quadratisch eingeht ($k = 1, \dots, N$). Nicht nur die Modellparameter, sondern auch die Diskretisierung der F - u -Kurve durch die Wahl geeigneter Stützstellen u_k beeinflusst den Wert der Zielfunktion, weshalb die Anzahl und Lage der Stützstellen genau definiert werden muss.

Die klassische Vorgehensweise zur Identifikation der Materialparameter bestünde nun darin, innerhalb einer iterativen Optimierungsroutine die Modellantwort des direkten Problems in jedem Iterationsschritt mit der FEM neu zu berechnen. Bei einer größeren Anzahl von Versuchen erweist sich diese Vorgehensweise als uneffizient (siehe Abschnitt 4.3.4). Stattdessen wird in dieser Arbeit die Response-Surface-Methode (RSM) verwendet. Sie kann sehr universell und effektiv für die Optimierung einer empirischen Modellantwort bezüglich mehrerer Einflussparameter angewandt werden [Mye95, Box05]. Die Lösung des

direkten Problems wird dabei durch bereichsweise lineare oder quadratische Interpolation zwischen simulierten Modellantworten $F_{\text{sim}}(u, \mathbf{p})$ in einer vorausberechenbaren Anzahl M von Design-Punkten $\mathbf{p}^{(l)}$ ($l = 1, \dots, M$) im n_p -dimensionalen Parameterraum \mathbb{R}^{n_p} approximiert. Die Näherung wird mit $\tilde{F}(u, \mathbf{p})$ bezeichnet und die zu minimierende Zielfunktion lautet damit

$$\Phi(\mathbf{p}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(\frac{\tilde{F}(u_k, \mathbf{p}) - F(u_k)}{F(u_k)} \right)^2 \rightarrow \min! \quad (7.1)$$

Die mehrdimensionale Interpolation bezüglich der Materialparameter \mathbf{p} ist am einfachsten mit einem regelmäßigen Parametergitter im \mathbb{R}^{n_p} zu organisieren. Jeder Gitterpunkt mit dem Ortsvektor $\mathbf{p}^{(l)}$ repräsentiert einen Parametersatz, dem jeweils eine simulierte F - u -Kurve $F_{\text{sim}}(u, \mathbf{p}^{(l)}) = F^{(l)}(u)$ zugeordnet ist (Abb. 7.1). Mehrere benachbarte Git-

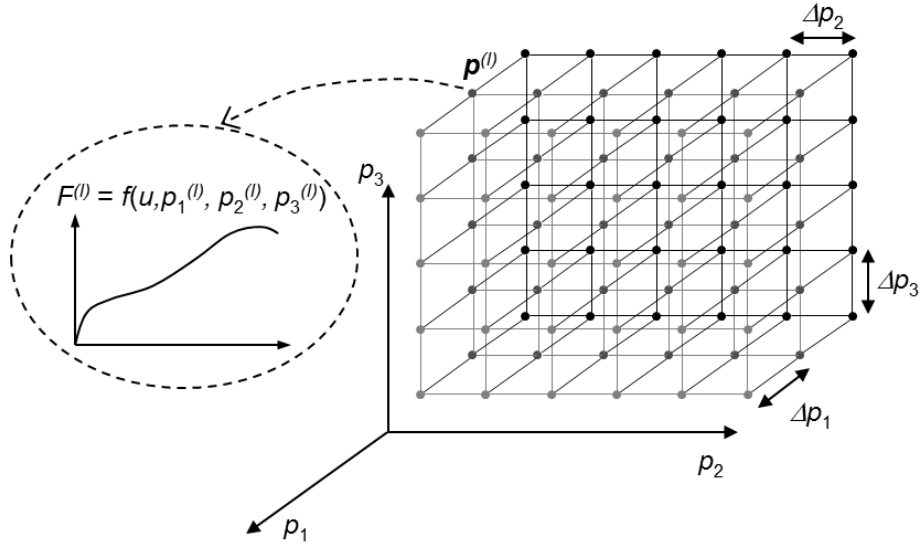


Abbildung 7.1: Datenbasis als Gitternetz von Knotenpunkten $\mathbf{p}^{(l)}$ mit zugeordneten F - u -Kurven im n_p -dimensionalen Parameterraum (in diesem Beispiel $n_p = 3$ und $3 \cdot 6 \cdot 5 = 90$ Knotenpunkte), $\mathbf{p}_{\text{base}} = \bigcup_{l=1}^M \mathbf{p}^{(l)}$

terpunkte sind jeweils Designpunkte für ein faktorielles RSM-Modell. Alle Gitterpunkte bilden zusammen mit den Modellantworten $F_{\text{sim}}(u, \mathbf{p}^{(l)})$ eine Datenbasis, aus der die RSM-Näherung jederzeit durch Interpolation zwischen den Designpunkten neu berechnet werden kann. Die Gesamtheit der Parameterpunkte $\bigcup_{l=1}^M \mathbf{p}^{(l)}$ sei mit \mathbf{p}_{base} bezeichnet. Durch den jeweils kleinsten und größten Parameterwert p_i^{\min} und p_i^{\max} des Gitters wird ein begrenzter Körper im Parameterraum beschrieben. Je enger die Gitterschrittweite Δp_i gewählt wird, das heißt, je dichter die Design-Punkte nebeneinander liegen, desto genauer ist die Approximation nichtlinearer Zusammenhänge möglich. Allerdings vergrößert sich durch kleinere Parameterschrittweiten auch die Datenbasis. Dies entspricht der h -Konvergenz bezüglich der Elementkantenlänge in der FEM. Die empirische Modellant-

wort in Form synthetischer F - u -Kurven wird also für mehrere Parametersätze mit der FEM berechnet und diese punktuellen Ergebnisse, welche einem faktoriellen Versuchsplan folgen, dienen dann der Approximation des immer noch unbekannten und im Allgemeinen nichtlinearen funktionellen Zusammenhanges zwischen den Materialparametern und der F - u -Kurve. Die Interpolation erfolgt bereichsweise in den Gitterzellen, weshalb die analytischen Interpolationsfunktionen auch nur bereichsweise definiert sind. An der Grenze benachbarter Gitterzellen wird nur die Stetigkeit der approximierten Modellantwort $\tilde{F}(u, \mathbf{p})$ (C_0 -Stetigkeit) gefordert, jedoch keine Stetigkeit der Ableitungen nach den Modellparametern. Allerdings liefert die Unstetigkeit der Ableitungen zugleich ein Maß für die Approximationsgüte. Umso geringer der Sprung in den Ableitungen an den Bereichsgrenzen, desto besser ist die Response-Surface-Approximation. Bei einem First-Order-Design können lineare Parameterabhängigkeiten und bei einem Second-Order-Design können quadratische Parameterabhängigkeiten exakt modelliert werden. Genauigkeitseinbußen sind dann nur numerisch oder durch statistische Schwankungen der Messergebnisse bedingt. Der wesentliche Pluspunkt der RSM besteht darin, dass nicht nur jeweils ein Parameter variiert wird, während die anderen fixiert sind, sondern mehrere Parameter gleichzeitig variiert werden und somit auch Interaktionen zwischen den Einflussparametern modelliert werden. Die Zerlegung des Parametergebietes in mehrere einfache Teilgebiete, hier als Interpolationszellen bezeichnet, ermöglicht es, lokal auch nichtlineare Parameterabhängigkeiten in guter Näherung mit einfachen Polynomansätzen zu beschreiben.

Die simulierten Kurven der Datenbasis sind bekannte Modellantworten in den Gitterpunkten. Zugleich dienen sie als Startnäherungen für die Minimierung der Zielfunktion (7.1) mit einer noch zu beschreibenden Optimierungsstrategie. Während der eigentlichen Optimierung sind keine weiteren Aufrufe eines FEM-Programms notwendig, weshalb eine Optimierungsroutine auch direkt im Anschluss an das Experiment auf dem PC der Prüfmaschine ausgeführt werden könnte. Allerdings kann mit zusätzlichen Designpunkten die Datenbasis verfeinert (kleinere Gitterschrittweite Δp_i) oder erweitert (kleineres p_i^{\min} oder größeres p_i^{\max}) werden. Prinzipiell kann zunächst mit einem groben Gitter der Parameterraum abgetastet werden um dann mit einem feineren Gitter lokal nach dem globalen Minimum zu suchen.

Die mehrdimensionale lineare oder quadratische Interpolation zwischen den Design-Punkten liefert eine analytische Zielfunktion vom Polynomgrad zwei oder vier in jedem Parameter. Deshalb können für die lokale Optimierung gradientenbasierte Verfahren vorteilhaft angewendet werden. Sowohl der Gradient der Zielfunktion als auch die Hessematrix der zweiten partiellen Ableitungen können für jede Interpolationszelle allein aus dem Informationsgehalt der Datenbasis berechnet werden. Allerdings ist die RSM-Approximation über die Grenzen der Interpolationszellen hinweg nur C_0 -stetig, weshalb zwar auch die

Zielfunktion stetig ist, jedoch nicht deren Ableitungen nach den Modellparametern. Dies stellt die einzige Schwäche der Methode dar. Wenn das Parameteroptimum gerade an der Grenze benachbarter Interpolationsbereiche liegt, können mehrere lokale Optima oder kein Optimum als Lösung erhalten werden.

Abbildung 7.2 illustriert schematisch die Vorgehensweise bei der Parameteridentifikation. In vier Sätzen zusammengefasst lässt sie sich folgendermaßen beschreiben:

- FEM-Simulationen mit systematisch variierten Materialparametern werden durchgeführt um eine Datenbasis von F - u -Kurven $F(u, \mathbf{p}_{\text{base}})$ aufzubauen.
- Zwischen den Kurven der Datenbasis wird bezüglich der Parameter interpoliert um eine Response-Surface-Approximation $\tilde{F}(u, \mathbf{p})$ zu erhalten.
- Die Abweichung zwischen der diskretisierten experimentell gemessenen Kurve $F(u_k)$ und der diskretisierten Modellantwort $\tilde{F}(u_k, \mathbf{p})$ wird durch ein Fehlerquadratfunktional, die Zielfunktion (7.1), charakterisiert.
- Die Zielfunktion wird mit Hilfe eines Optimierungsalgorithmus minimiert um diejenigen Materialparameterwerte $\mathbf{p}_{\text{ident}}$ zu identifizieren, welche das gemessene Ergebnis des Experiments am genauesten beschreiben.

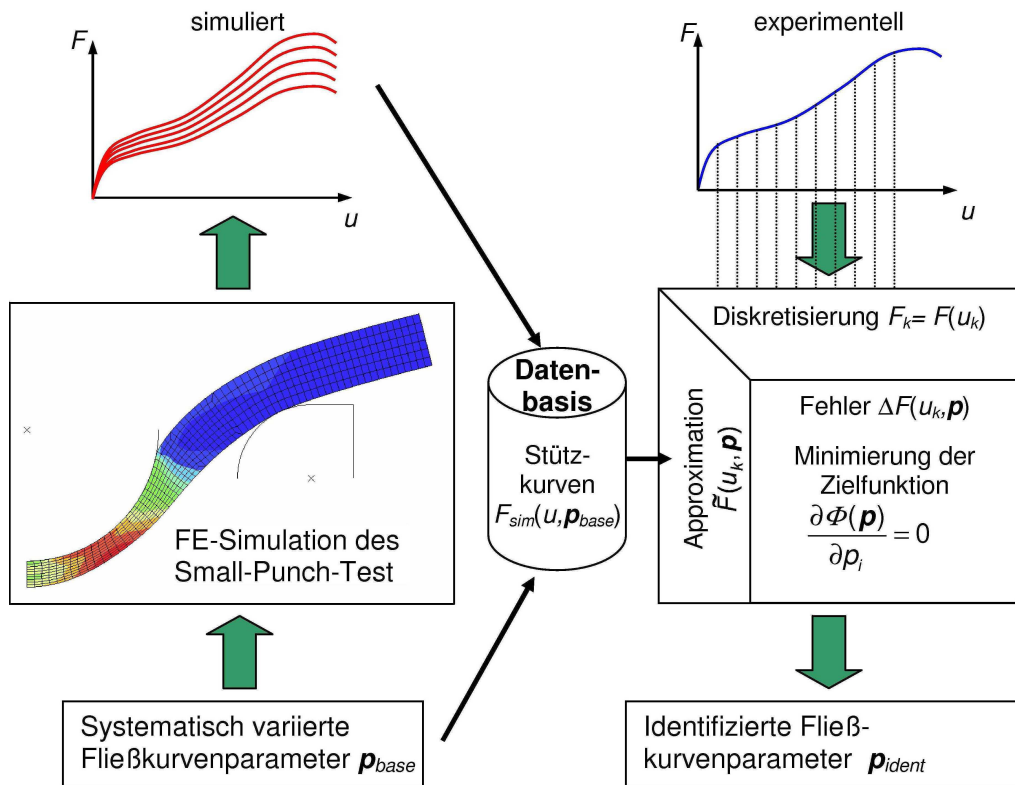


Abbildung 7.2: Schema der Vorgehensweise bei der Identifikation von Fließkurvenparametern

7.2 Parametrische Beschreibung der Fließkurve

7.2.1 Fließkurvenansätze

Bisher wurde die Fließkurve $\sigma_F(\varepsilon_V^{\text{pl}}, \mathbf{p})$ ganz allgemein als Funktion der plastischen Vergleichsdehnung $\varepsilon_V^{\text{pl}}$ mit einer noch unbestimmten Zahl von Funktionsparametern \mathbf{p} betrachtet. Diese Parameter repräsentieren die Anfangsfließgrenze σ_{F0} und die Materialverfestigung infolge der plastischen Verformung. Es gibt mehrere empirische Modelle, welche möglichst wenige Parameter (meist zwei bis vier) verwenden, um die reale Fließkurve zu approximieren. Aus dem Zugversuch ermittelte Fließkurven zeigen in der Regel mehr oder weniger große Abweichungen von den verschiedenen parametrischen Fließkurvenansätzen. Man sollte deshalb im Hinterkopf behalten, dass diese Funktionen stets fehlerbehaftete Idealisierungen des realen Verlaufs sind. Es werden nun Beispiele für häufig verwendete Fließkurvenansätze vorgestellt:

- lineare Verfestigung mit konstantem plastischen Tangentenmodul T_p :

$$\begin{aligned}\sigma_F &= \sigma_{F0} + T_p \varepsilon_V^{\text{pl}} \\ \mathbf{p} &= [\sigma_{F0} \quad T_p]^T\end{aligned}\tag{7.2}$$

- Potenzgesetzverfestigung (LUDWIK [Lud09]) mit Festigkeitskoeffizient K und Verfestigungsexponent n :

$$\begin{aligned}\sigma_F &= \sigma_{F0} + K \left(\varepsilon_V^{\text{pl}} \right)^n \\ \mathbf{p} &= [\sigma_{F0} \quad K \quad n]^T\end{aligned}\tag{7.3}$$

- Exponentialansatz (VOCE [Voc48]) mit Sättigungsspannung σ_s und charakteristischer Dehnung ε_c :¹

$$\begin{aligned}\sigma_F &= \sigma_{F0} + (\sigma_s - \sigma_{F0}) \left(1 - \exp \left(-\frac{\varepsilon_V^{\text{pl}}}{\varepsilon_c} \right) \right) \\ \mathbf{p} &= [\sigma_{F0} \quad \sigma_s \quad \varepsilon_c]^T\end{aligned}\tag{7.4}$$

Während σ_{F0} die gesamte Fließkurve nach oben oder unten verschiebt, wirken sich die restlichen Parameter auf den Anstieg und die Form der Verfestigungskurve aus. Es gibt zahlreiche weitere Ansätze, die im Prinzip Erweiterungen beziehungsweise Kombinationen dieser drei Grundformen sind, um eine bessere Anpassung an den realen Fließkurvenverlauf zu ermöglichen. Infolgedessen erhöht sich aber auch die Zahl der Modellparameter.

¹Häufig wird Gl. (7.4) auch in der Form $\sigma_F = \sigma_s - (\sigma_s - \sigma_{F0}) \exp \left(-\frac{\varepsilon_V^{\text{pl}}}{\varepsilon_c} \right)$ angegeben.

7.2.2 Eindeutigkeit der Fließkurvenparameter

Die eigentliche Abhängigkeit der F - u -Kurve besteht bezüglich der Fließgrenze des Materials. Erst durch die Verwendung eines parametrischen Fließkurvenansatzes wird die Parameterabhängigkeit eingeführt. Für die Stempelkraft $F(u, \sigma_F(\varepsilon_V^p, \mathbf{p}))$ kann bei festgehaltener Verschiebung und plastischer Vergleichsdehnung das totale Differential

$$dF(\sigma_F(\mathbf{p})) = \frac{\partial F(\sigma_F(\mathbf{p}))}{\partial \sigma_F} d\sigma_F = \frac{\partial F(\sigma_F(\mathbf{p}))}{\partial \sigma_F} \sum_{i=1}^{n_p} \frac{\partial \sigma_F(\mathbf{p})}{\partial p_i} dp_i = \sum_{i=1}^{n_p} \frac{\partial F(\sigma_F(\mathbf{p}))}{\partial p_i} dp_i \quad (7.5)$$

gebildet werden. Die Summe $\sum_{i=1}^{n_p} \partial \sigma_F(\mathbf{p}) / \partial p_i dp_i$ ist nur von der gewählten Fließkurvenbeschreibung abhängig und kann unabhängig vom RWP untersucht werden. Die Rückwirkung der Änderung der Fließspannung auf die in der Belastungsgeschichte erreichte plastische Vergleichsdehnung (also die Lösung des RWP) wird in dieser Betrachtung vernachlässigt. Maßgebend für die Sensitivität der F - u -Kurve bezüglich der Fließkurvenparameter, beschrieben durch $\partial F / \partial p_i$, ist also die Sensitivität der Fließkurve bezüglich ihrer Parameter $\partial \sigma_F / \partial p_i$. Wirkt sich ein Parameter verschwindend gering auf die Fließkurve aus, kann er auch nicht identifiziert werden. Damit eine sinnvolle Parameteridentifikation möglich wird, sollten die einzelnen Summanden $\partial \sigma_F(\mathbf{p}) / \partial p_i dp_i$ in Gl. (7.5) in der gleichen Größenordnung liegen. Für das Gitter der Datenbasis bedeutet dies, dass eine geringe Empfindlichkeit bezüglich eines Parameters durch eine größere Parameterschrittweite Δp_i kompensiert und umgekehrt ein Parameter mit einem starken Einfluss durch eine kleinere Parameterschrittweite in seiner Wirkung abgeschwächt werden kann.

Nun sollte eine mathematische Beschreibung gewählt werden, welche nicht nur anpassungsfähig an den realen Verlauf der Fließkurve ist, sondern auch eine eindeutige Abbildung zwischen den Parametern und dem Verlauf der Fließkurve ermöglicht. Bei mehr als einem Verfestigungsparameter sind mehrere unterschiedliche Parameterkombinationen denkbar, welche bis auf minimale Abweichungen die gleiche Kurve beschreiben und folglich bei der Parameteridentifikation keine eindeutige Lösung ermöglichen. Wenn es nun zwei unterschiedliche Parameterkombinationen gibt, welche einen fast identischen Fließkurvenverlauf beschreiben, so führt dies natürlich auch zu übereinstimmenden F - u -Kurven. Hierbei sind bereits Übereinstimmungen in Teilbereichen der Fließkurve problematisch. Wenn zum Beispiel bis zum Sprödbbruchversagen einer Stahlprobe nur kleine plastische Dehnungen auftreten, wird nur der Anfangsbereich der Fließkurve durchlaufen. Bei den üblichen Fließkurvenansätzen besteht dann die Gefahr, dass mehrere Parametersätze existieren, welche sich deutlich erkennbar unterscheiden, wenn man die Fließkurve bis zu sehr großen plastischen Dehnungen aufträgt, die jedoch zu Beginn der Kurve sehr ähnlich verlaufen und daher die wahre Fließkurve des getesteten Materials gleich gut repräsentieren.

Will man diese quasi mehrdeutigen Parametersätze grafisch aufspüren, müssten gleichzeitig alle Verfestigungsparameter variiert werden. Oder man untersucht die mathematischen Eigenschaften, indem man die partiellen Ableitungen nach den Materialparametern betrachtet, siehe Tabelle (7.1). Beim Potenzansatz und dem Exponentialansatz wirken sich Parameteränderungen nichtlinear auf die Fließkurve aus und außerdem sind die Parameter miteinander gekoppelt. Dies erschwert die Suche nach dem optimalen Parametersatz. Lediglich bei der linearen Verfestigung sind die beiden Parameter entkoppelt und gehen linear ein, sodass sich die Parameterwirkungen superpositionieren lassen. Damit die Linearkombination

$$\sigma_F(\varepsilon_V^{\text{pl}}, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{n_p} p_i \frac{\partial \sigma_F(\varepsilon_V^{\text{pl}}, \mathbf{p})}{\partial p_i} = \sum_{i=1}^{n_p} p_i \phi_i(\varepsilon_V^{\text{pl}}). \quad (7.6)$$

gilt, sollten die Ableitungen $\partial \sigma_F(\varepsilon_V^{\text{pl}}, \mathbf{p}) / \partial p_i = \phi_i(\varepsilon_V^{\text{pl}})$ linear unabhängige Funktionen sein.

Tabelle 7.1: Ableitung der Fließkurvenansätze (7.2), (7.3) und (7.4) nach ihren Parametern

	p_i	$\partial \sigma_F / \partial p_1$	$\partial \sigma_F / \partial p_2$	$\partial \sigma_F / \partial p_3$
(7.2)	σ_{F0}, T_p	1	$\varepsilon_V^{\text{pl}}$	
(7.3)	σ_{F0}, K, n	1	$(\varepsilon_V^{\text{pl}})^n$	$K(\varepsilon_V^{\text{pl}})^n \ln \varepsilon_V^{\text{pl}}$
(7.4)	$\sigma_{F0}, \sigma_s, \varepsilon_c$	$\exp\left(-\frac{\varepsilon_V^{\text{pl}}}{\varepsilon_c}\right)$	$1 - \exp\left(-\frac{\varepsilon_V^{\text{pl}}}{\varepsilon_c}\right)$	$(\sigma_s - \sigma_{F0}) \exp\left(-\frac{\varepsilon_V^{\text{pl}}}{\varepsilon_c}\right) \frac{\varepsilon_V^{\text{pl}}}{\varepsilon_c^2}$

7.2.3 Bereichsweise lineare Fließkurve

Die in dieser Arbeit untersuchten Stahlwerkstoffe (siehe Abschnitt 5.3) zeigen qualitativ unterschiedliches Verfestigungsverhalten. Welche der Fließkurvenansätze überhaupt erfolgversprechend sind, wird nun diskutiert. Die Fließkurven von 22NiMoCr37 zeigen eine ausgeprägte Streckgrenze. Um diesen Effekt zu erfassen, müsste die Lüdersdehnung ε_L als zusätzlicher Parameter in die Fließkurvenbeschreibung aufgenommen werden. Die Fließkurven von 18Ch2MFA weisen keine Lüdersdehnung, jedoch einen Knick zwischen zwei annähernd linearen Abschnitten auf. Entsprechend müsste der Verfestigungsansatz in zwei Bereiche aufgeteilt werden, was die Zahl der Parameter um mindestens zwei erhöht. Über die Verfestigungskurve des lasergeschweißten Stahles ist aus [Hee03] nur die Anfangsfließgrenze und die vereinfachte Annahme einer linearen Verfestigungskurve entsprechend Gl. (7.2) bekannt. Um Effekte wie die Lüdersdehnung und den Knick in der Fließkurve mit einem einzigen Fließkurvenansatz abzubilden, wäre die Erweiterung auf mindestens fünf Parameter notwendig. Zudem besteht bei den Fließkurvenfunktionen von Ludwik oder Voce die Gefahr, dass unterschiedliche Parametersätze den Verlauf der F - u -Kurve gleich gut beschreiben, wenn beim Spröddbruch die Belastungsgeschichte des Probenmaterials

schon im Anfangsbereich der Fließkurve endet.

Um die Vorteile der Eindeutigkeit eines linearen Verfestigungsansatzes mit der Anpassungsfähigkeit der nichtlinearen Fließkurvenfunktionen zu verbinden, wurde für die Parameteridentifikation eine bereichsweise lineare Fließkurve gewählt, wie sie in Abbildung 7.3 dargestellt ist. Die Kurve ist in vier lineare Bereiche mit variablem Anstieg unterteilt

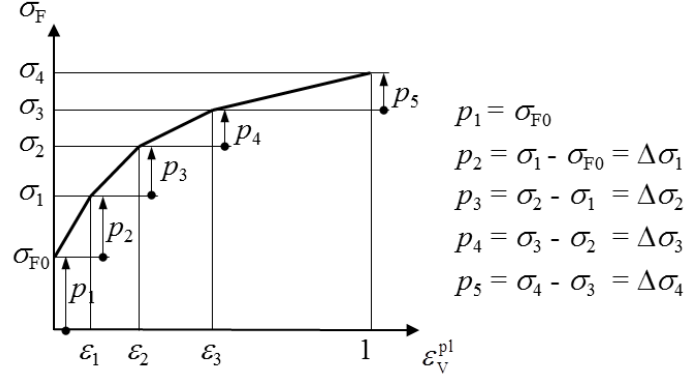


Abbildung 7.3: Parametrisierung der Fließkurve mit 4 linearen Verfestigungsbereichen

und wird durch die fünf Punkte $(0, \sigma_{F0})$, $(\varepsilon_1, \sigma_1)$, $(\varepsilon_2, \sigma_2)$, $(\varepsilon_3, \sigma_3)$ und $(1, \sigma_4)$ eindeutig beschrieben. Diese Art der Fließkurvendefinition durch Datenpunkte wird standardmäßig von kommerziellen FEM-Programmen erwartet und wurde bereits im Kapitel 6 (Tab. 6.2) für die Simulation des SPT verwendet. Die Fließkurvenfunktion lautet demzufolge

$$\sigma_F(\varepsilon_V^{pl}) = \begin{cases} \sigma_{F0} + \frac{\sigma_1 - \sigma_{F0}}{\varepsilon_1} \varepsilon_V^{pl} & \text{für } \varepsilon_V^{pl} < \varepsilon_1 \\ \sigma_1 + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} (\varepsilon_V^{pl} - \varepsilon_1) & \text{für } \varepsilon_1 \leq \varepsilon_V^{pl} < \varepsilon_2 \\ \sigma_2 + \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{\varepsilon_3 - \varepsilon_2} (\varepsilon_V^{pl} - \varepsilon_2) & \text{für } \varepsilon_2 \leq \varepsilon_V^{pl} < \varepsilon_3 \\ \sigma_3 + \frac{\sigma_4 - \sigma_3}{1 - \varepsilon_3} (\varepsilon_V^{pl} - \varepsilon_3) & \text{für } \varepsilon_3 \leq \varepsilon_V^{pl} \leq 1 \end{cases}, \quad (7.7)$$

wobei $\sigma_{F0} \leq \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3 \leq \sigma_4$ gilt. Damit die Eindeutigkeit der Fließkurve gewährleistet ist, wurden die plastischen Dehnungen ε_1 , ε_2 und ε_3 konstant gehalten und nach dem Schema $\varepsilon_3 = 1/\sqrt{10}$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3/\sqrt{10}$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2/\sqrt{10}$ mit folgenden Werten belegt:

$$\varepsilon_1 = 0,03162; \varepsilon_2 = 0,1; \varepsilon_3 = 0,3162. \quad (7.8)$$

Für die Parameteridentifikation verbleiben also fünf Spannungswerte. Allerdings erweist sich die Formulierung der Fließkurve mit den in Abb. 7.3 dargestellten Spannungsänderungen $\Delta\sigma_i = \sigma_i - \sigma_{i-1}$ als günstiger. Dann kann die Fließkurve (7.7) entsprechend dem Superpositionsprinzip (7.6) mit dem Parametervektor

$$\mathbf{p} = [\sigma_{F0} \quad \Delta\sigma_1 \quad \Delta\sigma_2 \quad \Delta\sigma_3 \quad \Delta\sigma_4]^T \quad (7.9)$$

in folgender Form geschrieben werden:

$$\sigma_F(\varepsilon_V^{\text{pl}}) = \sigma_{F0} + \left\{ \begin{array}{ll} \Delta\sigma_1 \frac{\varepsilon_V^{\text{pl}}}{\varepsilon_1} & \text{für } \varepsilon_V^{\text{pl}} < \varepsilon_1 \\ \Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2 \frac{\varepsilon_V^{\text{pl}} - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} & \text{für } \varepsilon_1 \leq \varepsilon_V^{\text{pl}} < \varepsilon_2 \\ \Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2 + \Delta\sigma_3 \frac{\varepsilon_V^{\text{pl}} - \varepsilon_2}{\varepsilon_3 - \varepsilon_2} & \text{für } \varepsilon_2 \leq \varepsilon_V^{\text{pl}} < \varepsilon_3 \\ \Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2 + \Delta\sigma_3 + \Delta\sigma_4 \frac{\varepsilon_V^{\text{pl}} - \varepsilon_3}{1 - \varepsilon_3} & \text{für } \varepsilon_3 \leq \varepsilon_V^{\text{pl}} \leq 1 \end{array} \right. . \quad (7.10)$$

Abbildung 7.4 zeigt den Einfluss der vier Verfestigungsparameter $\Delta\sigma_i$ auf die F - u -Kurve.

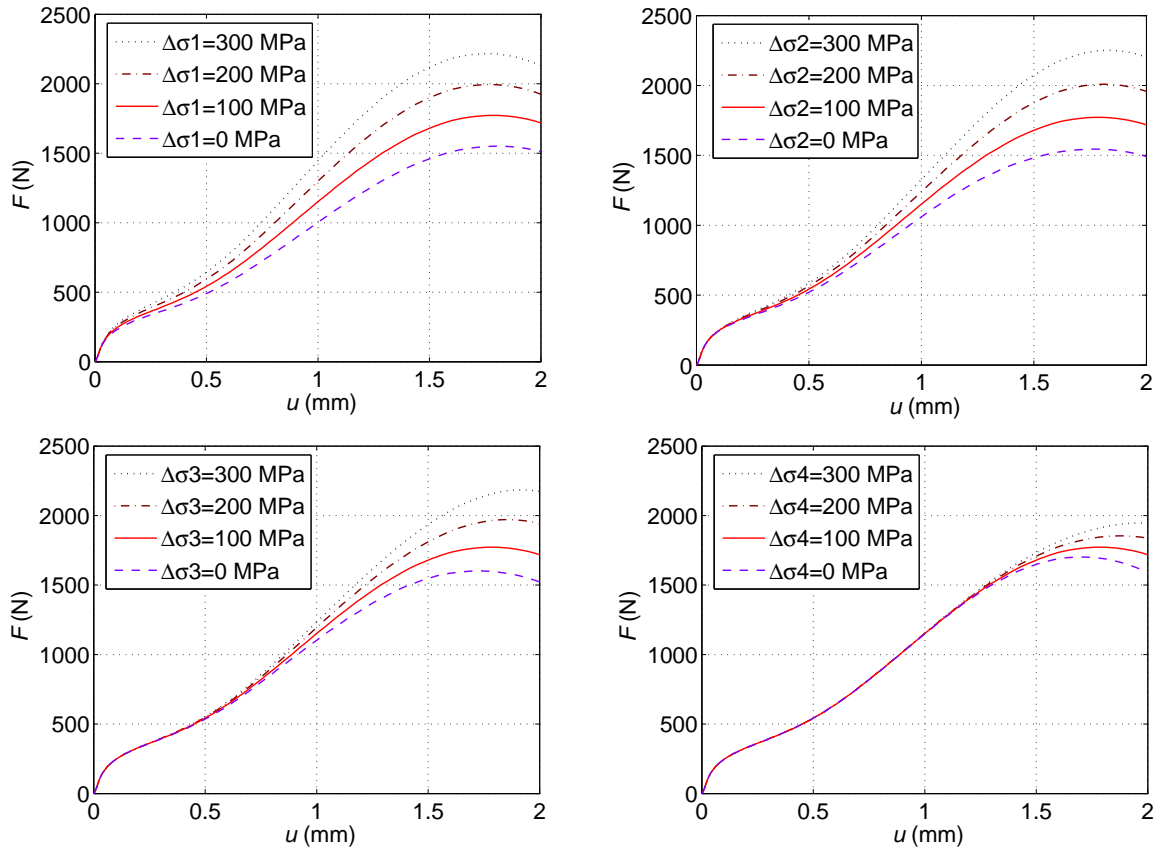


Abbildung 7.4: Einfluss der Verfestigungsparameter auf die Kraft-Verschiebungs-Kurve im SPT. Simulation der Referenzkurve (rote durchgezogene Linie) mit den Parametern aus Tabelle 6.2

Der Einfluss des Elastizitätsmoduls und der Anfangsfließgrenze wurde bereits in Abbildung 6.9 gezeigt. Erfreulicherweise haben die einzelnen Verfestigungsparameter unterschiedliche Auswirkung auf die Teilbereiche der F - u -Kurve. Der Parameter $\Delta\sigma_1$ beeinflusst die Kraft im gesamten plastischen Bereich der Kurve, wobei die Änderung der Kraft mit zunehmender Verschiebung größer wird. $\Delta\sigma_2$ wirkt sich bereits nicht mehr auf den elastisch-plastischen Übergang aus, da seine Wirkung erst bei einer plastischen Vergleichs-

dehnung von 3% beginnt und seine volle Wirkung erst bei einer Vergleichsdehnung von 10% erreicht. Analog verschiebt sich die Wirkung der Parameter $\Delta\sigma_3$ und $\Delta\sigma_4$ auf die F - u -Kurve noch weiter nach rechts. Im Hinblick auf die Parameteridentifikation ist außerdem erfreulich, dass die Änderung der Stempelkraft bezüglich der Parameter, also die Ableitung $\partial F(\mathbf{p})/\partial p_i$, nur schwach nichtlinear ist, was an dem kaum veränderlichen vertikalen Abstand der Kurven bei konstanter Parameterschrittweite erkennbar ist.

7.2.4 Berechnung der Datenbasis

Während für die bisherigen Parameterstudien ausgehend von einer Referenzkurve jeweils immer nur ein Materialparameter variiert wurde und die anderen unverändert blieben, werden nun alle Parameter variiert, sodass jeder Parameter mit jedem vollständig kombiniert wird. Alle Parameterkombinationen, bezeichnet mit \mathbf{p}_{base} , bilden ein regelmäßiges n_p -dimensionales Gitter im Parameterraum, dessen Gitterpunkte auf Geraden parallel zu den Koordinatenachsen liegen (siehe Abb. 7.1). Zusammen mit den F - u -Kurven, die für jeden Parametersatz mit der FEM berechnet werden, bildet das Gitter eine Datenbasis. Als zusätzlicher Parameter wurde der Elastizitätsmodul E in die Datenbasis aufgenommen. Er wirkt sich auf den elastischen Anstieg zu Beginn der F - u -Kurve aus und beeinflusst die Kraft sowie die Krümmung beim Übergang in den plastischen Bereich (siehe Abb. 6.9). Es besteht nun die Aufgabe, die folgenden sechs Parameter zu identifizieren:

$$\mathbf{p} = [E \quad \sigma_{F0} \quad \Delta\sigma_1 \quad \Delta\sigma_2 \quad \Delta\sigma_3 \quad \Delta\sigma_4]^T. \quad (7.11)$$

Für die Berechnung der Datenbasis werden die Parameter der Spannungs-Dehnungs-Kurve systematisch mit konstanter Schrittweite entsprechend den Angaben in Tabelle 7.2 variiert. Dabei werden für jeden Parameter physikalisch sinnvolle Ober- und Untergrenzen $p_i^{\min} \leq p_i \leq p_i^{\max}$ angenommen. Die Gesamtzahl aller Parameterkombinationen und demzufolge aller berechneten F - u -Kurven beträgt $5 \cdot 37 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 199800$. Die F - u -Kurven aus dem Experiment müssen zwischen der oberen und unteren Grenzkurve der Datenbasis liegen, andernfalls müsste die Datenbasis erweitert werden.

Tabelle 7.2: Systematisch variierte Parameter der Spannungs-Dehnungs-Kurve für die Datenbasis

Parameter	untere Grenze	obere Grenze	Schrittweite	Faktoranzahl
p_1 (MPa)	150000	250000	25000	5
p_2 (MPa)	300	1200	25	37
p_3 (MPa)	0	200	25	9
p_4 (MPa)	0	250	50	6
p_5 (MPa)	0	300	75	5
p_6 (MPa)	0	300	100	4

7.3 Lokale Approximation der parameterabhängigen Kraft-Verschiebungs-Kurve

Jedem Parameterpunkt $\mathbf{p}^{(l)}$ der Datenbasis wird eine simulierte F - u -Kurve zugeordnet. Die Response-Surface-Approximation $\tilde{F}(u, \mathbf{p})$ erfolgt durch bereichsweise mehrdimensionale Interpolation zwischen benachbarten Kurven bezüglich der n_p Materialparameter. Das Parametergitter wird dafür in einfache Teilgebiete in Form einer Gitterzelle zerlegt, deren Topologie einem vollständigen faktoriellen Versuchsplan entspricht. Bei linearer Interpolation besitzt die Gitterzelle 2^{n_p} Parameterknoten (zweistufiger Versuchsplan) und bei quadratischer Interpolation 3^{n_p} Parameterknoten (dreistufiger Versuchsplan). Für die Parameteridentifikation wird hier nur das quadratische Design verwendet. Es besitzt gegenüber einem linearen Design den Vorteil, dass bei gleichem Abstand von Gitterpunkten auch nichtlineare Parametereinflüsse lokal gut approximiert werden können. Bei einer quadratischen Parameterabhängigkeit ist die Approximation sogar exakt. Die elementare Gitterzelle wird in dieser Arbeit auch als Interpolationszelle bezeichnet. Die mehrdimensionale Interpolation wird mit der Absicht einer anschaulichen Darstellung zunächst für zwei Parameter beschrieben und später formal auf sechs Parameter erweitert.

7.3.1 Mehrdimensionale Interpolation für zwei Parameter

Interpolationsgebiet in natürlichen Koordinaten

Die quadratische Interpolationszelle im zweidimensionalen Parameterraum entspricht einem vollständigen dreistufigen faktoriellen Versuchsplan mit zwei Einflussgrößen (siehe Abb. 4.2) und besitzt demzufolge $3^2 = 9$ Knoten. Die Knoten werden von 1 bis 9 entsprechend Abbildung 7.5 durchnummeriert. In der Mitte der Interpolationszelle sei ein lokales kartesisches Koordinatensystem verankert, dessen natürliche Koordinaten w_1 und w_2 Werte zwischen -1 und $+1$ annehmen. Der Flächenmittelknoten 5 hat demzufolge die Koordinaten $(0,0)$, der Eckknoten 1 die Koordinaten $(-1,-1)$ und der Eckknoten 9 die Koordinaten $(1,1)$. Der Zusammenhang zwischen den lokalen und den globalen Koordinaten lautet

$$w_1 = \frac{p_1 - p_1^S}{\Delta p_1} \quad \text{und} \quad w_2 = \frac{p_2 - p_2^S}{\Delta p_2}, \quad (7.12)$$

$$p_1 = p_1^S + w_1 \Delta p_1 \quad \text{und} \quad p_2 = p_2^S + w_2 \Delta p_2, \quad (7.13)$$

wobei die Lage der Interpolationszelle durch deren globale Schwerpunktkoordinaten (p_1^S, p_2^S) gegeben ist. Die biquadratische Interpolation kann vorteilhaft mit den normierten lokalen Parameterkoordinaten w_1 und w_2 beschrieben werden. Die interpolierende Funktion

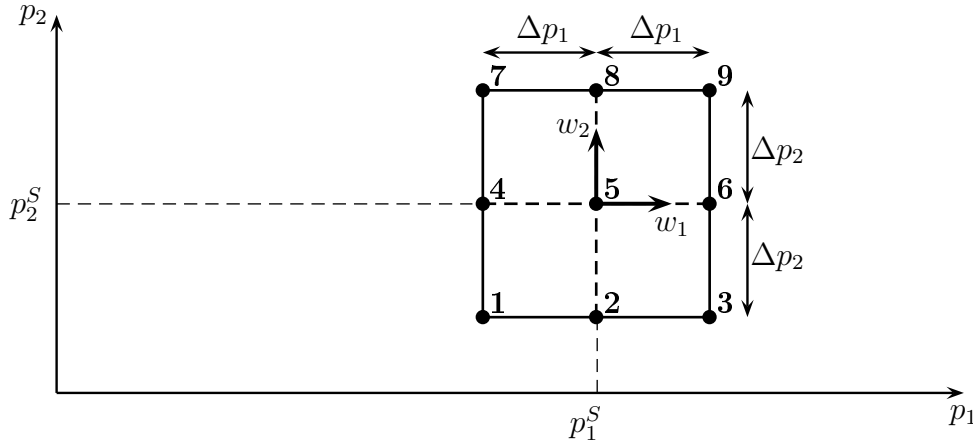


Abbildung 7.5: Quadratische 9-Knoten-Interpolationszelle mit den lokalen Koordinaten w_1, w_2 und deren Lage (p_1^S, p_2^S) im globalen p_1 - p_2 -Koordinatensystem

$\tilde{F}(u, w_1, w_2)$ stellt die Antwortfläche eines quadratischen RSM-Modells dar (Gl. (4.94)), dessen 9 unbekannte Koeffizienten aus 9 bekannten Modellantworten (Gl. (4.95)) in den Knoten der Interpolationszelle bestimmt werden können. Der Interpolationsfehler

$$\varepsilon(u, w_1, w_2) = \tilde{F}(u, w_1, w_2) - F_{\text{sim}}(u, w_1, w_2) \quad (7.14)$$

ist in den Knoten Null und kann durch kleinere Gitterabstände Δp_i verringert werden.

Eindimensionale quadratische Interpolation

Zunächst wird die Abhängigkeit der F - u -Kurve nur in Bezug auf einen Parameter betrachtet, der zweite sei konstant. Die eindimensionale quadratische Interpolation zwischen drei bekannten Kurven in den Knoten 1, 2 und 3 veranschaulicht Abbildung 7.6. Ausgedrückt in lokalen Koordinaten sei $F(u, -1, -1) = F^{(1)}$, $F(u, 0, -1) = F^{(2)}$ und $F(u, 1, -1) = F^{(3)}$. Die Interpolationsfunktion in Richtung w_1 bei festgehaltenem $w_2 = -1$ lautet dann:

$$\tilde{F}(u, w_1, -1) = F^{(2)} + \frac{1}{2} (F^{(3)} - F^{(1)}) w_1 + \frac{1}{2} (F^{(1)} - 2F^{(2)} + F^{(3)}) w_1^2. \quad (7.15)$$

Eine günstigere Schreibweise, die doppelt auftretende Funktionswerte vermeidet, lautet:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(u, w_1, -1) &= \frac{1}{2} w_1 (w_1 - 1) F^{(1)} + (1 - w_1^2) F^{(2)} + \frac{1}{2} w_1 (w_1 + 1) F^{(3)} \\ &= g_1(w_1) F^{(1)} + g_2(w_1) F^{(2)} + g_3(w_1) F^{(3)} \\ &= \sum_{\alpha=1}^3 g_{\alpha}(w_1) F^{(\alpha)}. \end{aligned} \quad (7.16)$$

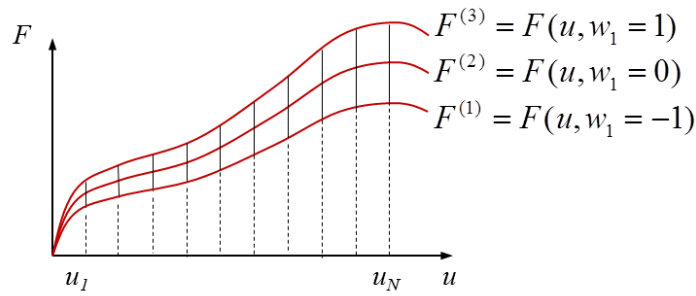


Abbildung 7.6: Eindimensionale quadratische Interpolation in natürlichen Koordinaten zwischen drei benachbarten F - u -Kurven. Die interpolierte Kraft wird bei festgehaltener Verschiebung berechnet.

Die g_α sind drei eindimensionale quadratische Formfunktionen, die jeweils nur in einem der drei Knoten den Wert 1 annehmen und in den anderen den Wert Null. Sie entsprechen damit den Formfunktionen für die Elementansatzfunktionen der FEM.

Rekursive Interpolation

Der biquadratische Interpolationsansatz für zwei Einflussparameter kann analog der FEM durch Multiplikation der eindimensionalen Formfunktionen erhalten werden. Das heißt, für die zweidimensionale 9-Knoten-Interpolationszelle aus Abbildung 7.5 werden $3 \cdot 3 = 9$ biquadratische Formfunktionen gebildet. Allerdings wird hier eine Schreibweise bevorzugt, welche nicht die explizite Angabe der mehrdimensionalen Formfunktionen erfordert. Stattdessen wird die mehrdimensionale Interpolation rekursiv auf die eindimensionale Interpolation zurückgeführt, sodass im Prinzip nur die Kombinationen von drei eindimensionalen Formfunktionen angegeben werden müssen. Dies wird sich später bei der Erweiterung auf sechs Parameter als vorteilhaft erweisen, denn dann werden $3^6 = 729$ sechsdimensionale Formfunktionen benötigt. Die rekursive Vorgehensweise wird nun für die zweidimensionale Interpolationszelle gezeigt. Bei jeweils festgehaltener Koordinate $w_2 = -1$, $w_2 = 0$ und $w_2 = 1$ lauten die drei Gleichungen für die quadratische Interpolation in Richtung w_1 :

$$\tilde{F}(u, w_1, -1) = \frac{1}{2}w_1(w_1 - 1)F^{(1)} + (1 - w_1^2)F^{(2)} + \frac{1}{2}w_1(w_1 + 1)F^{(3)} = \sum_{\alpha=1}^3 g_\alpha(w_1)F^{(\alpha)}, \quad (7.17)$$

$$\tilde{F}(u, w_1, 0) = \frac{1}{2}w_1(w_1 - 1)F^{(4)} + (1 - w_1^2)F^{(5)} + \frac{1}{2}w_1(w_1 + 1)F^{(6)} = \sum_{\alpha=1}^3 g_\alpha(w_1)F^{(\alpha+3)}, \quad (7.18)$$

$$\tilde{F}(u, w_1, 1) = \frac{1}{2}w_1(w_1 - 1)F^{(7)} + (1 - w_1^2)F^{(8)} + \frac{1}{2}w_1(w_1 + 1)F^{(9)} = \sum_{\alpha=1}^3 g_\alpha(w_1)F^{(\alpha+6)}. \quad (7.19)$$

Die soeben erhaltenen Ausdrücke $\tilde{F}(w_1, -1)$, $\tilde{F}(w_1, 0)$ und $\tilde{F}(w_1, 1)$ können für die quadratische Interpolation in Richtung w_2 genutzt werden, um die biquadratische Interpolations-

tionsgleichung zu erhalten:

$$\begin{aligned}\tilde{F}(u, w_1, w_2) &= \frac{w_2}{2}(w_2 - 1)\tilde{F}(u, w_1, -1) + (1 - w_2^2)\tilde{F}(u, w_1, 0) + \frac{w_2}{2}(w_2 + 1)\tilde{F}(u, w_1, 1) \\ &= \sum_{\beta=1}^3 g_{\beta}(w_2)\tilde{F}(u, w_1, \beta - 2).\end{aligned}\quad (7.20)$$

Eine solch geschachtelte Vorgehensweise kann sehr effektiv bei der Entwicklung von Programmcode eingesetzt werden. Setzt man nun noch (7.17) bis (7.19) ein, so erhält man als allgemeine Berechnungsvorschrift die Summationsformel

$$\tilde{F}(u, w_1, w_2) = \sum_{\beta=1}^3 \sum_{\alpha=1}^3 g_{\beta}(w_2)g_{\alpha}(w_1)F^{(\alpha+3(\beta-1))}\quad (7.21)$$

für die biquadratische Interpolation zwischen 9 bekannten Kraftwerten $F^{(\alpha+3(\beta-1))}$ in den Knoten der Gitterzelle aus Abb. 7.5. Die Reihenfolge der Summation ist vertauschbar.

7.3.2 Erweiterung auf sechs Parameter

Ein vollständiges quadratisches Response-Surface-Modell für 6 Einflussgrößen x_1 bis x_6

$$y(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 \sum_{k=0}^2 \sum_{l=0}^2 \sum_{m=0}^2 \sum_{n=0}^2 a_{ijklmn} x_1^i x_2^j x_3^k x_4^l x_5^m x_6^n \quad (7.22)$$

(siehe Abschnitt 4.4.3) besitzt $3^6 = 729$ Koeffizienten a_{ijklmn} . Der faktorielle Versuchsplan zur Bestimmung der Koeffizienten enthält 729 Designpunkte, die den Knoten der Gitterzelle im Parameterraum \mathbb{R}^6 entsprechen. Gelingt es, eine sechsdimensionale Interpolationsfunktion zu formulieren, spart man sich die Bestimmung der Modellkoeffizienten a_{ijklmn} und interpoliert stattdessen zwischen den simulierten Kraftantworten $F^{(1)}$ bis $F^{(729)}$ der sechsdimensionalen Gitterzelle. Die Gitterzelle bildet in normierter Form einen 6-dimensionalen Hyperwürfel mit der Kantenlänge 2. Der Ursprung der normierten Koordinaten w_1 bis w_6 , die Werte zwischen -1 und 1 annehmen, liegt im Mittelpunkt (Schwerpunkt) p_i^S des Hyperwürfels. Der Zusammenhang zwischen den lokalen und den globalen Koordinaten w_i und p_i lautet mit der Parameterschrittweite Δp_i :

$$w_i = \frac{p_i - p_i^S}{\Delta p_i} \quad \text{bzw.} \quad p_i = p_i^S + w_i \Delta p_i. \quad (7.23)$$

Die Ermittlung der Interpolationsvorschrift geschieht analog der zuvor beschriebenen Vorgehensweise für die biquadratische Interpolation eines zweiparametrischen Modells, bei

der eindimensionale Formfunktionen kombiniert wurden. Die formale Erweiterung der Berechnungsvorschrift (7.20) und (7.21) auf 6 Parameter liefert:

$$\begin{aligned}
\tilde{F}(u, \mathbf{w}) &= \tilde{F}(u, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6) \\
&= \sum_{\alpha_6=1}^3 g_{\alpha_6}(w_6) \cdot \tilde{F}(u, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, \alpha_6 - 2) \\
&= \sum_{\alpha_6=1}^3 \sum_{\alpha_5=1}^3 g_{\alpha_6}(w_6) g_{\alpha_5}(w_5) \cdot \tilde{F}(u, w_1, w_2, w_3, w_4, \alpha_5 - 2, \alpha_6 - 2) \\
&\dots \\
&= \sum_{\alpha_6=1}^3 \sum_{\alpha_5=1}^3 \sum_{\alpha_4=1}^3 \sum_{\alpha_3=1}^3 \sum_{\alpha_2=1}^3 g_{\alpha_6}(w_6) g_{\alpha_5}(w_5) g_{\alpha_4}(w_4) g_{\alpha_3}(w_3) g_{\alpha_2}(w_2) \\
&\quad \cdot \tilde{F}(u, w_1, \alpha_2 - 2, \alpha_3 - 2, \alpha_4 - 2, \alpha_5 - 2, \alpha_6 - 2) \\
&= \sum_{\alpha_6=1}^3 \sum_{\alpha_5=1}^3 \sum_{\alpha_4=1}^3 \sum_{\alpha_3=1}^3 \sum_{\alpha_2=1}^3 \sum_{\alpha_1=1}^3 g_{\alpha_6}(w_6) g_{\alpha_5}(w_5) g_{\alpha_4}(w_4) g_{\alpha_3}(w_3) g_{\alpha_2}(w_2) g_{\alpha_1}(w_1) \\
&\quad \cdot F^{(\alpha_1+3(\alpha_2-1)+9(\alpha_3-1)+27(\alpha_4-1)+81(\alpha_5-1)+243(\alpha_6-1))} .
\end{aligned} \tag{7.24}$$

7.3.3 Multiple-Responses-Modell für Kraft-Verschiebungs-Kurve

Im SPT liegt die Modellantwort in Form der Stempelkraft nicht einfach als skalare Größe vor, sondern als Funktion der Verschiebung. Bei festgehaltener Verschiebung kann die Stempelkraft aber tatsächlich als skalare Modellantwort betrachtet werden. Für die Berechnung der Fehlerquadratsumme in der Zielfunktion (7.1) wird sowohl die experimentelle als auch die approximierte Kraft-Verschiebungs-Kurve diskretisiert, indem an N Stützstellen u_k ($k = 1 \dots N$) die zugehörige Stempelkraft $F_k = F(u_k)$ bzw. $\tilde{F}_k(\mathbf{p}) = \tilde{F}(u_k, \mathbf{p})$ bestimmt wird (siehe Abbildung 7.6). Die diskretisierte F - u -Kurve kann nun als Multiple-Responses-Modell bezüglich der Einflussparameter \mathbf{p} angesehen werden. Das Ziel der Parameteroptimierung besteht dann darin, die Abweichung zwischen allen N Modellantworten $\tilde{F}_k(\mathbf{p})$ und Messwerten F_k gleichzeitig zu minimieren. Genau dieses Problem wird mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate gelöst.

Was bedeutet das für die Interpolationsfunktion (7.24), welche die Modellantwort in den lokalen Koordinaten \mathbf{w} beschreibt? Durch Interpolation werden N Antwortflächen $\tilde{F}_k(\mathbf{w})$ erhalten, die durch jeweils 3^6 aus FEM-Rechnungen bekannte Modellantworten $F_k^{(l)}$ in den Knoten $\mathbf{w}^{(l)}$ der Interpolationszelle verlaufen. Der Index l steht für die Nummer des Gitterknotens ($l = 1 \dots 3^6$) und $F_k^{(l)}$ für die mit der l -ten Parameterkombination simulierte Kraft bei der Verschiebung u_k . Diese Antwortflächen approximieren im betrachteten Gittergebiet die Abhängigkeit der Stempelkraft von den Materialparametern.

Ähnlich den Elementknoten in einem Finite-Elemente-Netz verbinden die Gitterknoten benachbarte Interpolationszellen, so dass eine C^0 -stetige Approximation der Stempelkraft F_k an den Stützstellen u_k über dem gesamten Parametergebiet der Datenbasis erfolgt. Obwohl sich die N Antwortflächen $\tilde{F}_k(\mathbf{w})$ unterscheiden, besitzen sie erfreulicherweise alle die gleiche Polynomform wie Gleichung (7.24). Der Unterschied wird durch die verschiebungsabhängige Stempelkraft in den Knoten der Interpolationszelle hervorgerufen. Die mit den Modellantworten $\tilde{F}_k(\mathbf{w})$ in den Stützstellen u_k gebildete Zielfunktion lautet

$$\Phi(\mathbf{w}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(\frac{\tilde{F}_k(\mathbf{w}) - F_k}{F_k} \right)^2 \rightarrow \min! \quad (7.25)$$

Die Zielfunktion wiederum stellt eine $(6+1)$ -dimensionale Hyperfläche über dem 6-dimensionalen Parametergebiet dar. Man kann sie als skalare Antwortfläche betrachten, die bei quadratischer Interpolation zwischen den F - u -Kurven ein Polynom vierten Grades in den Parametern ist. Sollte die Stempelkraft im SPT linear von einem Modellparameter abhängig sein, so vereinfacht sich die Approximation $\tilde{F}_k(\mathbf{w})$ zu einer linearen Funktion und die Zielfunktion zu einer quadratischen Funktion bezüglich dieses Parameters.

7.4 Optimierung der Zielfunktion

Dem optimalen Parametersatz \mathbf{p}^* der nichtlinearen Zielfunktion wird sich iterativ genähert. Ausgehend von einem Startvektor $\mathbf{p}_{(0)}$ wird eine Folge von Parametervektoren $\{\mathbf{p}_{(i)}\}$ konstruiert, welche im Fall der Lösbarkeit des Minimierungsproblems die Konvergenzeigenschaft

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{p}_{(i)} = \mathbf{p}^* \quad (7.26)$$

besitzen muss [Qua02]. Die allgemeine Iterationsvorschrift² lautet

$$\mathbf{p}_{(i+1)} = \mathbf{p}_{(i)} + \mathbf{s}_{(i)} \quad (7.27)$$

mit dem Schritt $\mathbf{s}_{(i)}$, dessen Berechnung mit verschiedenen Verfahren erfolgen kann. Aufgrund des Interpolationsansatzes (7.24) liegt eine bereichsweise definierte analytische Beschreibung der Zielfunktion vor. Demzufolge können innerhalb der Interpolationszelle Ableitungen nach den Parametern direkt berechnet werden und für die lokale Optimierung Gradientenverfahren vorteilhaft angewandt werden. Abstiegsverfahren fordern zusätzlich die Erfüllung der Bedingung

$$\Phi(\mathbf{p}_{(i+1)}) \leq \Phi(\mathbf{p}_{(i)}) . \quad (7.28)$$

²Zur Vermeidung von Verwechslungen steht der Index für den Iterationsschritt in runden Klammern

Die nun folgenden Ausführungen beziehen sich auf die Formulierung in lokalen Parameterkoordinaten w_i , mit der Absicht ein lokales Minimum der Zielfunktion innerhalb des Parametergebietes einer Interpolationszelle zu finden. In den Gleichungen (7.26) bis (7.28) ist daher der globale Parametervektor \mathbf{p} durch den lokalen Parametervektor \mathbf{w} zu ersetzen.

7.4.1 Residuum und Ableitungen

Für die weitere Behandlung der Zielfunktion (7.25) wird der relative Fehler an den Stützstellen u_k verkürzt als Residuum

$$r_k(\mathbf{w}) = \frac{\tilde{F}_k(\mathbf{w}) - F_k}{F_k} \quad (7.29)$$

geschrieben und die einzelnen Residuen zu einer Spaltenmatrix $\mathbf{r} = [r_1, r_2, \dots, r_N]^T$ zusammengefasst, sodass Gleichung (7.25) lautet:

$$\Phi(\mathbf{w}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N r_k(\mathbf{w})^2 = \frac{1}{N} \mathbf{r}(\mathbf{w})^T \mathbf{r}(\mathbf{w}). \quad (7.30)$$

Desweiteren werden die ersten und zweiten partiellen Ableitungen der Zielfunktion nach den Parameterkoordinaten benötigt. Hierbei spielt die Matrix der ersten Ableitungen der vektorwertigen Funktion $\mathbf{r}(\mathbf{w})$ nach dem Parametervektor \mathbf{w} eine wichtige Rolle, sie wird als Jacobi-Matrix oder Jacobian \mathbf{J} bezeichnet:

$$\mathbf{J}(\mathbf{w}) = \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} = \left[\frac{\partial r_k(\mathbf{w})}{\partial w_i} \right]. \quad (7.31)$$

Der Gradient der Zielfunktion, geschrieben mit dem Nabla-Operator ∇ , lautet demzufolge

$$\nabla \Phi(\mathbf{w}) = \frac{\partial \Phi(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N r_k(\mathbf{w}) \frac{\partial r_k(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} = \frac{2}{N} \mathbf{J}(\mathbf{w})^T \mathbf{r}(\mathbf{w}). \quad (7.32)$$

Damit die Zielfunktion ein lokales Extremum annimmt, müssen alle partiellen Ableitungen nach den Parametern verschwinden. Es ist das nichtlineare Gleichungssystem

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{w})}{\partial w_i} = 0 \quad (7.33)$$

zu lösen. Hinreichende Informationen über den Charakter des Extrempunktes liefert die als Hesse-Matrix oder Hessian bezeichnete Matrix $\mathbf{H}(\mathbf{w}) = [H_{ij}(\mathbf{w})]$ der zweiten partiellen

Ableitungen nach den Parameterkoordinaten mit den Komponenten

$$H_{ij}(\mathbf{w}) = \frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{w})}{\partial w_i \partial w_j} = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial r_k(\mathbf{w})}{\partial w_i} \frac{\partial r_k(\mathbf{w})}{\partial w_j} + r_k(\mathbf{w}) \frac{\partial^2 r_k(\mathbf{w})}{\partial w_i \partial w_j} \right). \quad (7.34)$$

Sie beschreibt die lokale Krümmung bei einer Taylor-Reihenentwicklung der Zielfunktion an der Position \mathbf{w} . In Matrizenschreibweise ergibt sich der Ausdruck

$$\mathbf{H}(\mathbf{w}) = \nabla^T (\nabla \Phi(\mathbf{w})) = \frac{2}{N} \left(\mathbf{J}(\mathbf{w})^T \mathbf{J}(\mathbf{w}) + \sum_{k=1}^N r_k(\mathbf{w}) \nabla^T (\nabla r_k(\mathbf{w})) \right). \quad (7.35)$$

Es werden nun noch die partiellen Ableitungen des Residuums benötigt, sie lauten:

$$\frac{\partial r_k(\mathbf{w})}{\partial w_i} = \frac{1}{F_k} \frac{\partial \tilde{F}_k(\mathbf{w})}{\partial w_i}, \quad (7.36)$$

$$\frac{\partial^2 r_k(\mathbf{w})}{\partial w_i \partial w_j} = \frac{1}{F_k} \frac{\partial^2 \tilde{F}_k(\mathbf{w})}{\partial w_i \partial w_j}. \quad (7.37)$$

Die ersten und zweiten partiellen Ableitungen der Approximation $\tilde{F}_k(\mathbf{w})$ wiederum können aufgrund des interpolierenden Polynomansatzes (7.24) analytisch berechnet werden. Dafür werden die Ableitungen der drei quadratischen Formfunktionen g_1 , g_2 sowie g_3 benötigt:

$$g_1(w_i) = 1/2 w_i (w_i - 1), \quad \frac{\partial g_1(w_i)}{\partial w_i} = w_i - 1/2, \quad \frac{\partial^2 g_1(w_i)}{\partial w_i^2} = 1 \quad (7.38)$$

$$g_2(w_i) = 1 - w_i^2, \quad \frac{\partial g_2(w_i)}{\partial w_i} = -2w_i, \quad \frac{\partial^2 g_2(w_i)}{\partial w_i^2} = -2 \quad (7.39)$$

$$g_3(w_i) = 1/2 w_i (w_i + 1), \quad \frac{\partial g_3(w_i)}{\partial w_i} = w_i + 1/2, \quad \frac{\partial^2 g_3(w_i)}{\partial w_i^2} = 1 \quad (7.40)$$

Zum Beispiel gilt für die erste Ableitung nach w_1 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{F}_k(\mathbf{w})}{\partial w_1} &= \sum_{\alpha_1=1}^3 \frac{\partial g_{\alpha_1}(w_1)}{\partial w_1} \cdot \tilde{F}_k(\alpha_1 - 2, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6) \\ &= (w_1 - 1/2) \cdot \tilde{F}_k(-1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6) \\ &\quad + (-2w_1) \cdot \tilde{F}_k(0, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6) \\ &\quad + (w_1 + 1/2) \cdot \tilde{F}_k(1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6). \end{aligned} \quad (7.41)$$

Für die erste Ableitung nach w_i laut demzufolge die Summenformel:

$$\frac{\partial \tilde{F}_k(\mathbf{w})}{\partial w_i} = \sum_{\alpha_i=1}^3 \frac{\partial g_{\alpha_i}(w_i)}{\partial w_i} \cdot \tilde{F}_k(\mathbf{w}|_{w_i=\alpha_i-2}). \quad (7.42)$$

Ebenfalls kompakt lassen sich die zweiten Ableitungen nach w_i und w_j schreiben:

$$\frac{\partial^2 \tilde{F}_k(\mathbf{w})}{\partial w_i^2} = \sum_{\alpha_i=1}^3 \frac{\partial^2 g_{\alpha_i}(w_i)}{\partial w_i^2} \cdot \tilde{F}_k(\mathbf{w}|_{w_i=\alpha_i-2}) \quad \text{für } i = j, \quad (7.43)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{F}_k(\mathbf{w})}{\partial w_i \partial w_j} = \sum_{\alpha_i=1}^3 \sum_{\alpha_j=1}^3 \frac{\partial g_{\alpha_i}(w_i)}{\partial w_i} \frac{\partial g_{\alpha_j}(w_j)}{\partial w_j} \cdot \tilde{F}_k(\mathbf{w}|_{w_i=\alpha_i-2, w_j=\alpha_j-2}) \quad \text{für } i \neq j. \quad (7.44)$$

7.4.2 Globale Startwertsuche

Prinzipiell könnte die Minimierung der Zielfunktion von einem beliebigen Punkt im Parameterraum gestartet werden. Jedoch bietet sich die bereits berechnete Datenbasis dafür an, eine gute Startnäherung zu bestimmen. Zunächst wird für jede F - u -Kurve der Datenbasis der Wert der Zielfunktion berechnet. Derjenige Parametervektor, für den die Zielfunktion am kleinsten ist, wird erste Startnäherung $\mathbf{p}_{(0)}$. Der zugehörige Gitterknoten legt die Lage der Interpolationszelle im Parametergitter fest, er bildet deren zentralen Knoten, für den in lokalen Koordinaten $\mathbf{w}_{(0)} = \mathbf{0}$ gilt. Dieses Abrastern des Parameterraumes wird auch als Gittersuche (Grid-Search) bezeichnet. Anschließend wird die lokale Optimierung mit einem Gradientenverfahren innerhalb der Interpolationszelle durchgeführt. Um sicherzustellen, dass ein gefundenes lokales Optimum auch das globale Optimum im Parametergebiet der Datenbasis ist, bietet es sich an, auch den zweitbesten, drittbesten usw. Parametervektor als Startnäherung zu verwenden.

7.4.3 Gedämpftes Newton-Verfahren

Die lokale Optimierung wird mit einem gedämpften Newton-Verfahren durchgeführt. Die Iterationsvorschrift lautet mit dem ungedämpften Newton-Schritt $\mathbf{s}_{(i)}$ und dem Dämpfungsfaktor α :

$$\mathbf{w}_{(i+1)} = \mathbf{w}_{(i)} + \alpha \mathbf{s}_{(i)} \quad \text{mit } \mathbf{w}_{(0)} = \mathbf{0}. \quad (7.45)$$

Der Newton-Schritt resultiert aus einer Taylor-Entwicklung des Gradienten der Zielfunktion an der aktuellen Position $\mathbf{w}_{(i)}$, die mit dem linearen Glied abgebrochen wird:

$$\nabla \Phi(\mathbf{w}_{(i)} + \mathbf{s}_{(i)}) = \nabla \Phi(\mathbf{w}_{(i)}) + \mathbf{H}(\mathbf{w}_{(i)})\mathbf{s}_{(i)} + O(\|\mathbf{s}_{(i)}\|^2). \quad (7.46)$$

Es wird nun die verkürzte Schreibweise

$$\Phi_{(i)} = \Phi(\mathbf{w}_{(i)}), \quad \mathbf{H}_{(i)} = \mathbf{H}(\mathbf{w}_{(i)}) \quad (7.47)$$

vereinbart. Weil der Gradient als notwendige Bedingung für ein Minimum verschwinden muss, wird der Newton-Schritt

$$\mathbf{s}_{(i)} = -\mathbf{H}_{(i)}^{-1} \nabla \Phi_{(i)} \quad (7.48)$$

erhalten. Das heißt, die Zielfunktion wird in der Umgebung des aktuellen Parametervektors durch ein quadratisches Modell approximiert und für dieses das Extremum berechnet, indem die Nullstelle des Gradienten berechnet wird. Der Newton-Schritt liefert die exakte Lösung des Gleichungssystems (7.33), falls die Approximation $\tilde{F}_k(\mathbf{w})$ linear in den Parametern ist und außerdem keine Interaktionen zwischen den Parametern auftreten. Denn dann ist die Hesse-Matrix in der gesamten Interpolationszelle konstant und Ableitungen höherer Ordnung verschwinden, sodass die Taylor-Entwicklung der Zielfunktion bis zur zweiten Ordnung identisch mit der Zielfunktion ist. Andernfalls, das ist der allgemeine Fall, muss sich dem Extremum in mehreren Iterationsschritten genähert werden. Diese Betrachtung legt den Schluss nahe, dass das lokal konvergente Newton-Verfahren desto mehr Iterationsschritte benötigt, umso nichtlinearer die Parameterabhängigkeit ist.

Das Hauptproblem besteht nun in der Berechnung der Inversen der Hesse-Matrix. Sollte \mathbf{H} singular sein, also Eigenwerte besitzen, die nicht verschieden von Null sind, so ist die Hesse-Matrix nicht invertierbar. Stattdessen wird häufig das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{H}_{(i)} \mathbf{s}_{(i)} = -\nabla \Phi_{(i)} \quad (7.49)$$

gelöst oder die Moore-Penrose-Pseudoinverse \mathbf{H}^+ der Hesse-Matrix verwendet [Gil89, Kel99]. Die Moore-Penrose-Inverse (siehe Anhang A.1.3) wird numerisch berechnet und kann auch für singuläre Matrizen angewandt werden. Sie lässt sich mit Hilfe der Singulärwertzerlegung einer Matrix berechnen und ist in numerischer Software wie MATLAB bereits als Funktion implementiert. Die numerische Berechnung des Newton-Schrittes erfolgt dann mit

$$\mathbf{s}_{(i)} = -\mathbf{H}_{(i)}^+ \nabla \Phi_{(i)}. \quad (7.50)$$

Damit das Newton-Verfahren tatsächlich gegen ein Minimum iteriert, muss die Hesse-Matrix positiv definit sein. Nur dann ist der Newton-Schritt $\mathbf{s}_{(i)}$ eine Abstiegsrichtung. Dies kann auf einfache Weise kontrolliert werden, indem die Bedingung für eine Abstiegsrichtung [Gil89]

$$\mathbf{s}_{(i)}^T \nabla \Phi_{(i)} < 0 \quad (7.51)$$

überprüft wird.

Weil das Newton-Verfahren nur lokale Konvergenz zeigt, wird die Länge des Newton-Schrittes mit dem Faktor $0 < \alpha \leq 1$ verringert, jedoch nicht seine Richtung geändert. Geht man davon aus, dass der Newton-Schritt in der Nähe des lokalen Optimums sehr klein ist, erscheint es sinnvoll, den Dämpfungsfaktor von der Größe des Newton-Schrittes abhängig zu machen. Die Dämpfung soll einerseits nahe dem Minimum klein sein, um die dortige hohe Konvergenzgeschwindigkeit des Newton-Verfahrens auszunutzen und andererseits groß, wenn der berechnete Newton-Schritt groß ist. Unter Verwendung der Euklidischen Norm (auch 2-Norm) $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, welche die Länge eines Vektors liefert, wurde für den Dämpfungsfaktor daher die Funktion

$$\alpha = \frac{1}{(1 + \|\mathbf{s}_{(i)}\|)^2} \quad (7.52)$$

verwendet, sodass die Iterationsvorschrift

$$\mathbf{w}_{(i+1)} = \mathbf{w}_{(i)} + \frac{\mathbf{s}_{(i)}}{(1 + \|\mathbf{s}_{(i)}\|)^2} \quad (7.53)$$

lautet. Der gedämpfte Newton-Schritt hat dann bei $\|\mathbf{s}_{(i)}\| = 1$ seine maximale Länge von $1/4$ und nimmt bei weiterer Vergrößerung von $\|\mathbf{s}_{(i)}\|$ langsam ab. Damit wird zwar eine mit der Länge des Schrittes stark zunehmende Dämpfung modelliert, allerdings stabilisiert dies das Newton-Verfahren in gewünschter Weise sehr stark, wenn die Startnäherung zu weit weg vom Optimum der Zielfunktion entfernt ist, beziehungsweise die Zielfunktion sehr stark nichtlinear ist, ohne die hohe lokale Konvergenzgeschwindigkeit in der Nähe des Optimums wesentlich zu beeinträchtigen.

Schließlich muss noch ein Abbruchkriterium für die Iteration festgelegt werden. Weil die Länge des ungedämpften Newton-Schrittes bereits berechnet wird, bietet sich dafür

$$\|\mathbf{s}_{(i)}\| < \epsilon \quad (7.54)$$

mit der Fehlerschranke $\epsilon \ll 1$ an. Sobald also die Länge des Newton-Schrittes den sehr kleinen Zahlenwert ϵ unterschreitet, wird die Iteration beendet und das Minimum akzeptiert. Ein anderes Abbruchkriterium könnte die Änderung des Zielfunktionswertes sein, dies hätte aber den Nachteil, dass in langgestreckten Tälern der Zielfunktionsfläche ein vorzeitiger Abbruch erfolgt.

7.4.4 Methode des steilsten Abstiegs

Sollte die Bedingung (7.51) für eine Abstiegsrichtung nicht erfüllt sein, so muss statt des Newton-Verfahrens ein anderes zum Einsatz kommen. Als Alternative bietet sich die Methode des steilsten Abstiegs an. Die Richtung des steilsten Abstiegs ist auf simple Weise gegeben durch

$$\mathbf{s}_{(k)} = -\nabla \Phi_{(i)} . \quad (7.55)$$

Aufwändig ist dagegen die Bestimmung der optimalen Schrittweite. Eine exakte Methode für deren Bestimmung ist das sogenannte Line-Search-Verfahren, bei dem entlang einer Abstiegsrichtung nach demjenigen Schrittweitenfaktor α gesucht wird, der den kleinsten Zielfunktionswert liefert. Eine exakte Suche ist jedoch sehr aufwändig [Mad04], es genügt eine verbesserte Näherung für \mathbf{w}^* zu erhalten. Deshalb wird der Faktor α analog Gleichung (7.52) für das gedämpfte Newton-Verfahren gewählt, wobei die maximale Schrittweitelänge $\alpha \mathbf{s}_{(i)}$ auf 1/4 begrenzt wird. Sollte der Zielfunktionswert dennoch ansteigen, weil die Schrittweite zu groß ist, werden zusätzliche Schrittweithalbierungen vorgenommen.

7.4.5 Globale Suche und Optimierung auf dem Rand

Wandert der Optimierungsalgorithmus aus der Interpolationszelle heraus, in der er sich gerade befindet, d.h. nehmen einer oder mehrere der lokalen Parameterkoordinaten w_i einen Wert größer als 1 oder kleiner als -1 an, so wechselt er in die den Koordinaten entsprechende benachbarte Interpolationszelle. Die Lage wird aus der Umrechnung (7.23) in die globalen Parameterkoordinaten ermittelt. Beim Wechsel in eine benachbarte Zelle wird zwar eine Extrapolation ausgeführt, jedoch kann in der benachbarten Zelle wieder interpoliert werden. Die Suchrichtung und Schrittweite wird also immer lokal berechnet, die Optimierung kann jedoch global im gesamten Parameterraum der Datenbasis erfolgen. Die Zielfunktion enthält keine zusätzlichen Nebenbedingungen, denn die unrestringierte Suche nach dem Minimum der Zielfunktion ist erwünscht. Durch die Wahl eines geeigneten Materialmodells und bei ausreichend genauen Messwerten sollen physikalisch sinnvolle Parametergrenzen automatisch eingehalten werden (siehe Abschnitt 4.3.2). Eine Ausnahme bildet aber der Fall, dass der Optimierungsalgorithmus über den Rand der Datenbasis hinausschießt. Dann erfolgt tatsächlich eine Restriktion, die programmiertechnisch aber auf einfachste Weise umgesetzt wird, indem der Algorithmus auf den Rand der Datenbasis zurückspringt. Denjenigen lokalen Parameterkoordinaten w_i , welche den Wert 1 überschreiten oder -1 unterschreiten, werden die Werte $w_i = 1$ bzw. $w_i = -1$ zugewiesen. Damit ist auch eine Parameteroptimierung auf dem Rand der Datenbasis möglich.

7.5 Programm zur Parameteridentifikation

7.5.1 Entwicklung des modularen Programms SOFI

Um die Fließkurvenparameter sowie den Elastizitätsmodul zu identifizieren, wurde ein modular aufgebautes Computerprogramm entwickelt. Es erhielt den Namen SOFI. Dieses Akronym steht für: Such- und Optimierungsalgorithmus für die Fließkurvenidentifikation. Die Implementierung des Algorithmus kann vom Grundsatz her in einer beliebigen Programmiersprache erfolgen. Die Wahl fiel in dieser Arbeit auf die Skriptsprache des numerischen Softwarepakets MATLAB [Mat05], da sich die Konzeption und die Programmierparadigmen dieser Sprache ideal für effiziente numerische Berechnungen mit Vektoren, Matrizen und mehrdimensionalen Feldern eignen. Viele mathematische Funktionen, insbesondere für effektive Matrizenberechnungen sind bereits in der umfangreichen Funktionsbibliothek enthalten und die MATLAB-Umgebung bietet umfangreiche Möglichkeiten der grafischen Visualisierung. Die Quelltextdateien sind sogenannte „m-files“ (`<Dateiname>.m`), die aus der grafischen Benutzeroberfläche von MATLAB gestartet werden können oder auch als Batch-Datei im Kommandozeilenmodus ausgeführt werden können.

Die im folgenden dargelegte Beschreibung stellt nur den grundlegenden Aufbau des Programms und wichtige Programmschritte vor, ohne auf spezifische Details des MATLAB-Quellcodes einzugehen. Im Quellcode wurden im Wesentlichen die in den Abschnitten 7.3 und 7.4 beschriebenen Beziehungen umgesetzt. Einzelne Programmschritte müssen jedoch noch erklärt werden. Dabei werden allgemeingültige Beziehungen und Algorithmen beschrieben, die prinzipiell in jeder Programmiersprache, die sich für numerische Berechnungen eignet, implementiert werden können.

7.5.2 Beschreibung der Programmmodule

Das Programm arbeitet sequentiell fünf Module ab:

- **Modul 0:** Eingabe der Daten und Steuergrößen für den Programmablauf.
- **Modul 1:** Einlesen der Datenbasis aus simulierten F - u -Kurven.
- **Modul 2:** Einlesen, Aufbereiten und Diskretisierung der gemessenen F - u -Kurve.
- **Modul 3:** Diskretisierung der Datenbasis, Globale Gittersuche nach den besten Kurven der Datenbasis hinsichtlich des Zielfunktionswertes, d.h. Startwertsuche für die lokale Optimierung mit Gradientenverfahren.
- **Modul 4:** Ausgehend von den besten Startnäherungen lokale Optimierung der Zielfunktion in der jeweiligen Interpolationszelle mit einer kombinierten Methode aus gedämpftem Newton-Verfahren und der Methode des steilsten Abstiegs.

Jedes Modul ist als einzelnes m-file gespeichert und wird innerhalb des Hauptprogramms aufgerufen. Die Module 0 bis 3 dienen der Dateneingabe, Datenvorbereitung und Startwertsuche. Modul 4 enthält den eigentlichen Kern des Programms, die auf einem Response-Surface-Modell basierende Optimierungsroutine. Der Nutzer führt nur im Modul 0 Eingaben durch, die dann in den nachfolgenden Modulen und im Hauptprogramm verwendet werden. Das Hauptprogramm realisiert die Speicherung der Ergebnisdaten.

Einlesen und Aufbereiten der Datenbasis

Die entsprechend Tabelle 7.2 berechnete Datenbasis aus F - u -Kurven steht in Form von Textdateien zur Verfügung, wobei jede Kurve in einer einzelnen Datei abgespeichert ist, in deren Dateiname die Parameterwerte kodiert sind. Mit dem Modul `modul1_read.m` werden alle Textdateien eingelesen und in Form einer einzelnen strukturierten Datenbasis in einer Datei `<Datenbasisname>.mat` abgespeichert. Mit dem Modul `modul1_load.m` kann die strukturierte Datenbasis aus `<Datenbasisname>.mat` wieder eingelesen werden. Dies geschieht sehr viel schneller als das Einlesen der einzelnen Textdateien.

Verschiebungskorrektur

Weil die simulierten Kurven nur die relative Verschiebung des Stempels gegenüber der Matrize erfassen, die gemessenen Kurven jedoch auch die Apparturnachgiebigkeit enthalten, wird bei der gemessenen Stempelverschiebung im Modul `modul2.m` die Apparturnachgiebigkeit in Abhängigkeit der gemessenen Stempelkraft nach Gl. (6.4) abgezogen. Die Apparturnachgiebigkeit wird mit der Verschiebungskorrektur $\Delta u(F)$ nach Gl. (6.3) approximiert. Deren Berechnung erfolgt für die drei genutzten Konfigurationen des SPT mit den Parametern aus Tabelle 6.1. Es wird darauf hingewiesen, dass die Verschiebungskorrektur bei jeder Änderung des Versuchsaufbaus, dazu zählt auch der Austausch von Teilen, neu bestimmt werden sollte und auch bei unverändertem Versuchsaufbau in regelmäßigen Abständen eine Neukalibrierung erfolgen sollte um Veränderungen infolge Abnutzung der stark beanspruchten Teile Stempel und Matrize zu erfassen.

Diskretisierung

Für die Diskretisierung der F - u -Kurven muss die Anzahl N der Stützstellen u_k , die kleinste und größte Verschiebung $u_{\min} = u_1$ und $u_{\max} = u_N$ sowie die Aufteilung der Stützstellen auf das Intervall $u_{\min} \leq u \leq u_{\max}$ festgelegt werden. Die Aufteilung der Stützstellen erfolgte nicht gleichmäßig sondern verdichtet in Richtung kleinerer Verschiebungen um in diesem Bereich der F - u -Kurve eine bessere Auflösung zu erreichen und gleichzeitig diesen Anfangsbereich der Kurve stärker gewichtet in die Zielfunktion einfließen zu lassen. Die

Berechnungsvorschrift für die $k = 1 \dots N$ Stützstellen lautet:

$$u_k = u_{\min} + (u_{\max} - u_{\min}) \cdot \frac{\exp\left(\frac{k-1}{N-1}\right) - 1}{\exp(1) - 1}. \quad (7.56)$$

Es wurden $N = 25$ Stützstellen gewählt. Die minimale Verschiebung wurde in den Bereich des Übergangs vom elastischen in den plastischen Bereich der gemessenen F - u -Kurve gelegt. Dieser Übergang ist in Abbildung 2.1 als Übergang zwischen Bereich I und II mit der charakteristischen Kraft F_e gekennzeichnet. Demzufolge gilt $u_{\min} = u(F_e)$. Die maximale Verschiebung wurde dorthin gelegt, wo der Anstieg der Kurve dF/du den Wert 100 N/mm unterschreitet. Das bedeutet, dass u_{\max} für spröde gebrochene SP-Proben die Verschiebung am Kraftmaximum ist und für duktil und spröd-duktil versagende Proben vor dem Kraftmaximum liegt. Im letzteren Fall ist der Unterschied zwischen der Lage des Kraftmaximums und u_{\max} jedoch meist gering.

Das Ergebnis der Diskretisierung zeigt an einem Beispiel Abb. 7.7. Die diskretisierte F - u -Kurve (weiße Punkte) wurde zusammen mit den Kurven der Datenbasis im Intervall $[u_{\min}, u_{\max}]$ gezeichnet. Basierend auf den Stützstellen (7.56) erfolgt die Diskretisierung der experimentellen Kurve im Modul `modul2.m`, die der Datenbasis im Modul `modul3.m`.

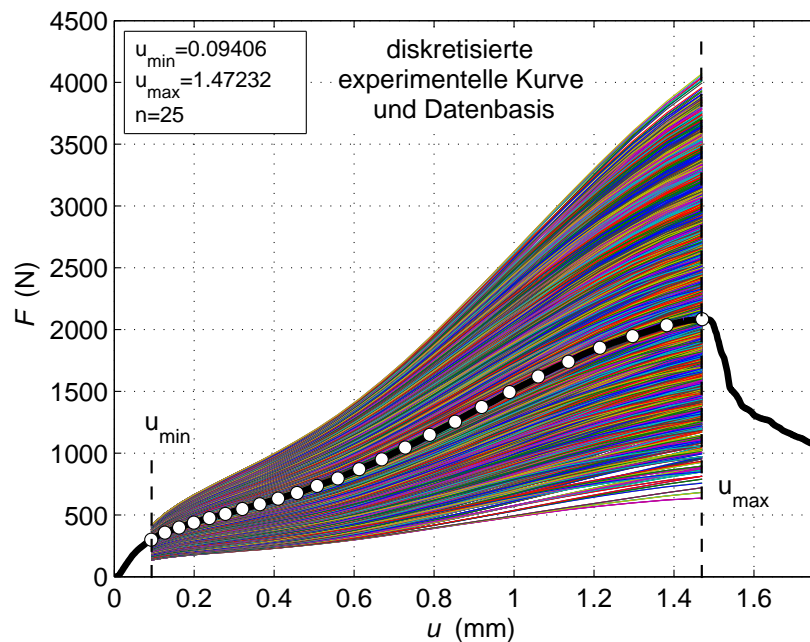


Abbildung 7.7: Diskretisierte experimentelle F - u -Kurve (weiße Punkte) einer SP-Probe (Laserschweißnaht, Schmelzzone, Raumtemperatur) innerhalb der diskretisierten Kurven der Datenbasis (bunt)

Startwertsuche

Zunächst wird für alle Kurven $F(u_k, \mathbf{p}^{(l)})$ der diskretisierten Datenbasis der Wert der Zielfunktion berechnet:

$$\Phi(\mathbf{p}^{(l)}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(\frac{F(u_k, \mathbf{p}^{(l)}) - F_k}{F_k} \right)^2. \quad (7.57)$$

Die Zielfunktion beschreibt die mittlere Fehlerquadratsumme. Abb. 7.8 zeigt für eine getestete SP-Probe die Fehlerfläche über zwei Parametern bei fixierten restlichen Parametern. Die beste Startnäherung wurde markiert. Für die Optimierung des Fehlers wird allerdings nicht nur der Gitterpunkt mit dem kleinsten Zielfunktionswert als Startnäherung verwendet, sondern auch der zweitbeste, drittbeste usw.:

$$\Phi(\mathbf{p}_{(0)}^1) \leq \Phi(\mathbf{p}_{(0)}^2) \leq \Phi(\mathbf{p}_{(0)}^3) \leq \dots \quad (7.58)$$

Die Berechnung der Startnäherungen $\mathbf{p}_{(0)}^s (s = 1, \dots, s_{\max})$ erfolgt im Modul `modul3.m`. Durch die Verwendung mehrerer Startnäherungen erhöht sich die Wahrscheinlichkeit, das globale Minimum tatsächlich zu finden, beziehungsweise mehrere gleichberechtigte Minima ausfindig zu machen.

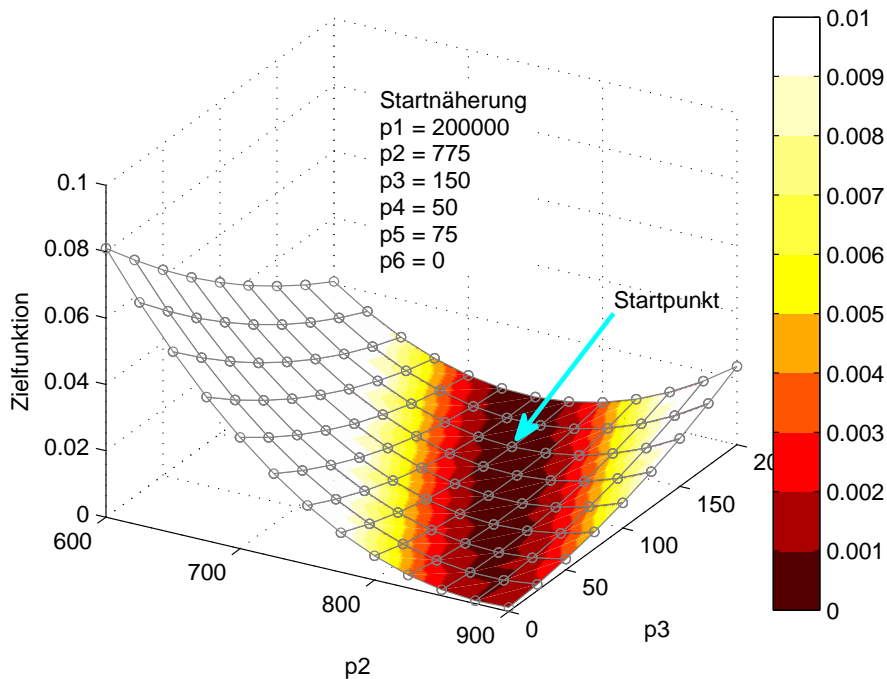


Abbildung 7.8: Plot der Fehlerfläche über den Parametern p_2 und p_3 bei fixen Parametern p_1 , p_4 , p_5 und p_6 für das Beispiel einer SP-Probe aus der Schmelzzone der Schweißnaht, geprüft bei Raumtemperatur. Die beste Startnäherung $\mathbf{p}_{(0)}^1$ mit dem kleinsten Zielfunktionswert ist mit einem Pfeil markiert.

Lokale Minimierung

Die Minimierung der Zielfunktion in lokalen Koordinaten (7.25) im Modul `modul4.m` basiert auf der Response-Surface-Approximation $\tilde{F}_k(\mathbf{w})$. Der Optimierungsalgorithmus verwendet das im Abschnitt 7.4.3 beschriebene gedämpfte Newton-Verfahren und schaltet auf das im Abschnitt 7.4.4 beschriebene Abstiegsverfahren um, falls das Newton-Verfahren keine Abstiegsrichtung liefert. Das Verfahren konvergiert also gegen das nächstgelegene Minimum. Sollte die Suchrichtung aus der Interpolationszelle herausführen, so befolgt der Optimierungsalgorithmus die im Abschnitt 7.4.5 beschriebenen Regeln.

Für jeden Iterationsschritt wird die mehrmalige Berechnung der mehrdimensionalen Interpolation zwischen den diskretisierten F - u -Kurven der Gitterzelle nach Gl. (7.24) benötigt. Deshalb wurde dafür eine Funktion programmiert, die innerhalb des Moduls aufgerufen wird.

Bei mehreren Startnäherungen $\mathbf{p}_{(0)}^s$ wird `modul4.m` mehrmals aufgerufen und das jeweilige Optimierungsergebnis \mathbf{p}^s gespeichert. Sollten dabei unterschiedliche lokale Minima ermittelt werden, deren Zielfunktionswerte sich nicht stark unterscheiden, so wird eine gewichtete Mittelung zwischen den globalen Parameterwerten der lokalen Minima durchgeführt. Als Wichtungsfaktor wurde das reziproke Quadrat des Zielfunktionswertes gewählt, sodass die Berechnungsvorschrift für den identifizierten Parametervektor

$$\mathbf{p}_{\text{ident}} = \frac{\sum_{s=1}^{s_{\max}} \mathbf{p}^s / \left(\Phi(\mathbf{p}^s) \right)^2}{\sum_{s=1}^{s_{\max}} 1 / \left(\Phi(\mathbf{p}^s) \right)^2} \quad (7.59)$$

lautet. Ein Minimum geht darin umso schwächer ein, desto größer sein Zielfunktionswert ist. Bei mehreren Minima mit exakt gleichen Zielfunktionswerten wird das arithmetische Mittel der Parameterwerte erhalten.

7.5.3 Test und Validierung des Programms

Identifikation von Polynomkoeffizienten

Um den Programmcode zu testen, können analytische Funktionen verwendet werden. Als Testfunktion wurde ein Polynom 6. Grades

$$y = f(x, \mathbf{p}) = p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 + p_4 x^4 + p_5 x^5 + p_6 x^6 \quad (7.60)$$

ohne Konstantglied gewählt, sodass die sechs Polynomkoeffizienten die sechs zu identifizierenden Parameter sind, also praktisch ein Polynomfit durchgeführt wird. Das Funk-

tionsargument x soll wie die simulierte Verschiebung im SPT Werte zwischen 0 und 2 annehmen. Der Funktionswert y entspricht der Stempelkraft im SPT. Die sechs Funktionsparameter wurden systematisch variiert, die zugehörigen Funktionsverläufe berechnet und die Kurven in einer strukturierten Datenbasis abgespeichert. Da die sechs Parameter linear in die Funktion eingehen, ermöglicht die Response-Surface-Approximation bis auf numerische Fehler die exakte Beschreibung der Parameterabhängigkeit. Demzufolge sollte es mit der Methode möglich sein, Polynome 6. Grades exakt zu identifizieren.

Tatsächlich konnten für zehn per Zufallsgenerator erzeugte Parametersätze die Polynomkoeffizienten erfolgreich reidentifiziert werden. Die identifizierten Zahlenwerte stimmen in den ersten vier Stellen mit den exakten Werten überein, Abweichungen treten erst ab der fünften Stelle auf. Die Zielfunktionswerte in den berechneten Minima liegen zwischen 10^{-15} und 10^{-14} und damit im Rahmen der numerischen Genauigkeit der verwendeten Software. Die zehn Testbeispiele sind im Anhang A.4.1 dokumentiert.

Parameteridentifikation mit synthetischen F - u -Kurven

Eine anwendungsbezogene Validierung des Identifikationsprogramms soll durch die Reidentifizierung der Materialparameter aus simulierten F - u -Kurven mit zufällig generierten Parametersätzen erfolgen. Es wurde die gleiche Parametrisierung (7.11) wie für die Datenbasis gewählt. Per Zufallsgenerator wurden wieder zehn Parametersätze generiert und für jeden die F - u -Kurve mit der FEM simuliert. Diese Kurven seien im Weiteren als Validierungspattern bezeichnet. Hier liefert die Response-Surface-Approximation keine exakte Näherung mehr, jedoch zeigten die Voruntersuchungen, dass die Abhängigkeit der F - u -Kurve von den Fließkurvenparametern mit Hilfe quadratischer Interpolation eine sehr gute Approximation der Parameterabhängigkeit ermöglicht, wenn die Parameterschrittweiten klein genug gewählt werden. Die Abbildung 7.9 zeigt die zehn gegebenen F - u -Kurven mit bekannten Materialparametern gemeinsam mit den identifizierten Kurven (mit den identifizierten Parametern simulierte Kurven).

Bei allen zehn Beispielen liegen die F - u -Kurven praktisch deckungsgleich übereinander. Die Zielfunktionswerte der berechneten Minima liegen zwischen $6 \cdot 10^{-8}$ und $6 \cdot 10^{-6}$, was einem quadratisch gemittelten Fehler der Stempelkraft von 0,025 % bis 0,25 % entspricht. Im Gegensatz zu experimentellen Kurven sind die synthetischen Kurven nicht mit Messfehlern behaftet, sodass die bei der Reidentifikation erzielte Genauigkeit die mit dem Programm SOFI höchstens erzielbare Genauigkeit widerspiegelt. Die Parameter des Validierungspatterns und die einzelnen Ergebnisse der Reidentifizierung sind im Anhang A.4.2 dokumentiert. Obwohl die Zahlenwerte einzelner Fließkurvenparameter einen Fehler von mehr als 50 MPa aufweisen, sind die prozentualen Abweichungen in den Fließspannungen im Mittel nur gering. Hierbei muss erwähnt werden, dass eine positive Abweichung eines

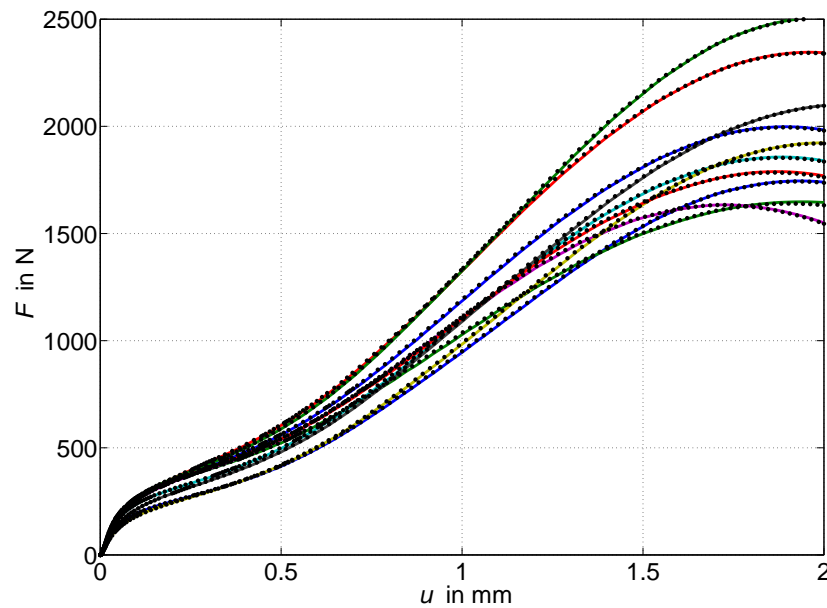


Abbildung 7.9: Vergleich der Kurven des Validierungspatterns (durchgezogene farbige Linien) mit den F - u -Kurven, welche mit den identifizierten Parametern simuliert wurden (punktierter schwarze Linien).

Parameters und eine negative Abweichung eines anderen Parameters sich in ihrer Auswirkung auf die Fließkurve und die F - u -Kurve zum Teil wieder kompensieren. Ausschlaggebend für die Genauigkeit der Identifikationsergebnisse sind also nicht die Abweichungen der Parameterzahlenwerte, sondern der relative Fehler in den Fließspannungen.

7.6 Ergebnisse der Parameteridentifikation

Für die drei mit dem SPT getesteten Stahlwerkstoffe (22NiMoCr37, 18Ch2MFA, 355EMZ) wurden mit den in Abschnitt 5.6 dokumentierten F - u -Kurven die sechs Materialparameter E , σ_{F0} , $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$, $\Delta\sigma_3$ und $\Delta\sigma_4$ (siehe Abschnitt 7.2.3) identifiziert. Bei jeder Prüftemperatur standen jeweils mehrere SPT-Kurven für die Identifikation zu Verfügung. Manchmal ist es üblich, die unter gleichen Prüfbedingungen gemessenen Kurven erst zu mitteln und dann die Parameteridentifikation durchzuführen, was eine erhebliche Reduzierung des Berechnungsaufwandes bedeuten würde. Das kann durchaus sinnvoll sein, wenn die gemessenen Kurvenverläufe praktisch eine vernachlässigbare Streuung aufweisen. Dies ist jedoch bei den in dieser Arbeit betrachteten SPT-Kurven nicht der Fall, wie die Abbildungen 5.10, 5.12 und 5.15 zeigen. Deshalb wurde für jede einzelne gemessene Kurve die Parameteridentifikation mit SOFI durchgeführt. Erst anschließend wurden die identifizierten Fließkurven für jede Prüftemperatur gemittelt. Aus Platzgründen werden hier nur die gemittelten Ergebnisse dargestellt. Am Beispiel der Laserschweißnaht werden im Anhang A.5 die Identifikationsergebnisse für jede einzelne F - u -Kurve dokumentiert.

7.6.1 22NiMoCr37

Die Tabelle 7.3 gibt die Mittelwerte der identifizierten Materialparameter für 22NiMoCr37 bei jeder Prüftemperatur an. Die zugehörigen Fließkurven zeigt die Abbildung 7.10. Bei der niedrigsten Temperatur von -191 °C konnte der vierte lineare Bereich nicht identifiziert werden, weil er sich zu schwach auf die F - u -Kurve auswirkt.

Tabelle 7.3: Aus der F - u -Kurve des SPT identifizierte Parameter (gemittelte Werte) der Spannungs-Dehnungs-Kurve für 22NiMoCr37 bei verschiedenen Prüftemperaturen

Temperatur ($^{\circ}\text{C}$)	E (GPa)	σ_{F0} (MPa)	$\Delta\sigma_1$ (MPa)	$\Delta\sigma_2$ (MPa)	$\Delta\sigma_3$ (MPa)	$\Delta\sigma_4$ (MPa)
+20	205,2	399,1	122,1	42,6	145,8	203,2
0	247,4	419,9	96,2	29,7	244,6	108,7
-20	244,0	437,5	82,1	60,8	228,5	115,1
-40	247,2	464,7	89,6	43,0	243,0	133,3
-60	242,8	463,7	101,1	53,9	222,8	103,7
-91	231,8	516,7	31,7	155,7	226,5	215,5
-110	215,9	533,4	73,5	129,5	259,7	265,1
-154	240,2	708,6	52,2	116,2	260,9	337,6
-170	247,4	775,5	57,1	99,6	269,6	345,0
-191	240,0	890,7	51,8	59,6	153,4	

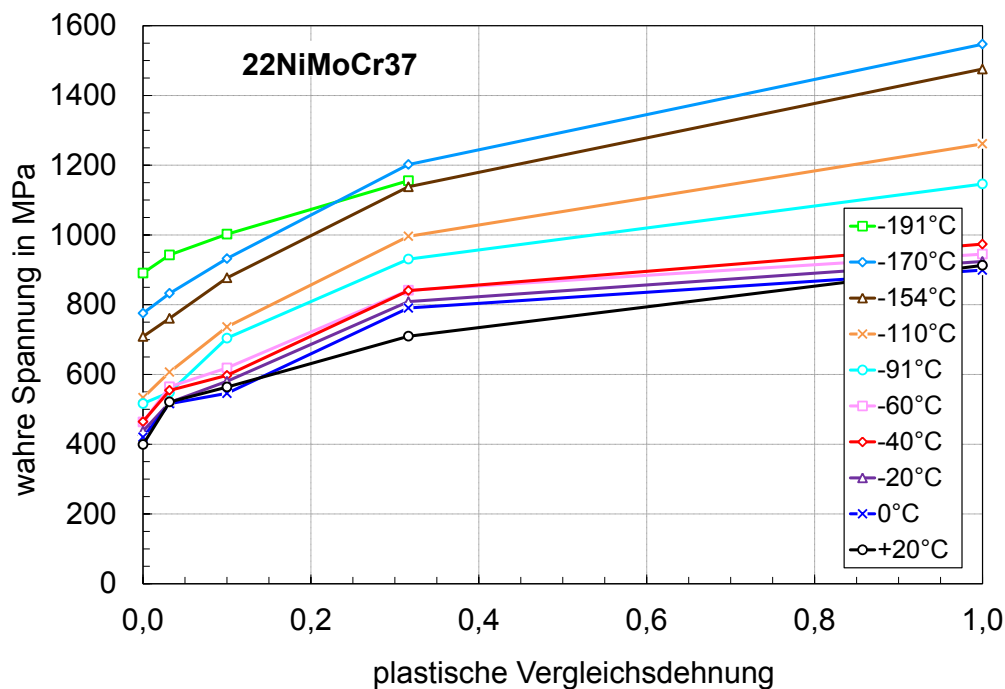


Abbildung 7.10: Mit dem SPT identifizierte Fließkurven (gemittelt) für den Stahl 22NiMoCr37 bei Prüftemperaturen von $+20\text{ °C}$ bis -191 °C

7.6.2 18Ch2MFA

Die Tabelle 7.4 gibt die Mittelwerte der identifizierten Materialparameter für 18Ch2MFA bei jeder Prüftemperatur an. Die zugehörigen Fließkurven zeigt die Abbildung 7.11. Bei den niedrigsten Temperaturen von -160°C und -180°C konnte der vierte lineare Bereich nicht identifiziert werden, weil er sich zu schwach auf die F - u -Kurve auswirkt.

Tabelle 7.4: Aus der F - u -Kurve des SPT identifizierte Parameter (gemittelte Werte) der Spannungs-Dehnungs-Kurve für 18Ch2MFA bei verschiedenen Prüftemperaturen

Temperatur ($^{\circ}\text{C}$)	E (GPa)	σ_{F0} (MPa)	$\Delta\sigma_1$ (MPa)	$\Delta\sigma_2$ (MPa)	$\Delta\sigma_3$ (MPa)	$\Delta\sigma_4$ (MPa)
20	231,2	611,3	87,7	46,6	50,2	134,4
0	227,1	598,6	113,8	30,9	58,7	210,6
-20	247,6	614,8	98,1	59,7	81,7	214,5
-40	243,1	619,3	119,9	47,5	38,2	188,7
-60	245,6	628,1	144,3	36,6	49,8	184,8
-80	249,7	664,4	132,8	46,8	78,0	268,5
-100	249,1	701,9	87,4	72,1	145,6	262,1
-120	247,0	745,9	96,7	69,1	158,3	240,2
-140	245,5	824,7	64,0	84,9	215,8	242,6
-160	244,5	900,3	64,5	85,8	178,1	
-180	250,0	991,8	66,6	75,6	133,8	

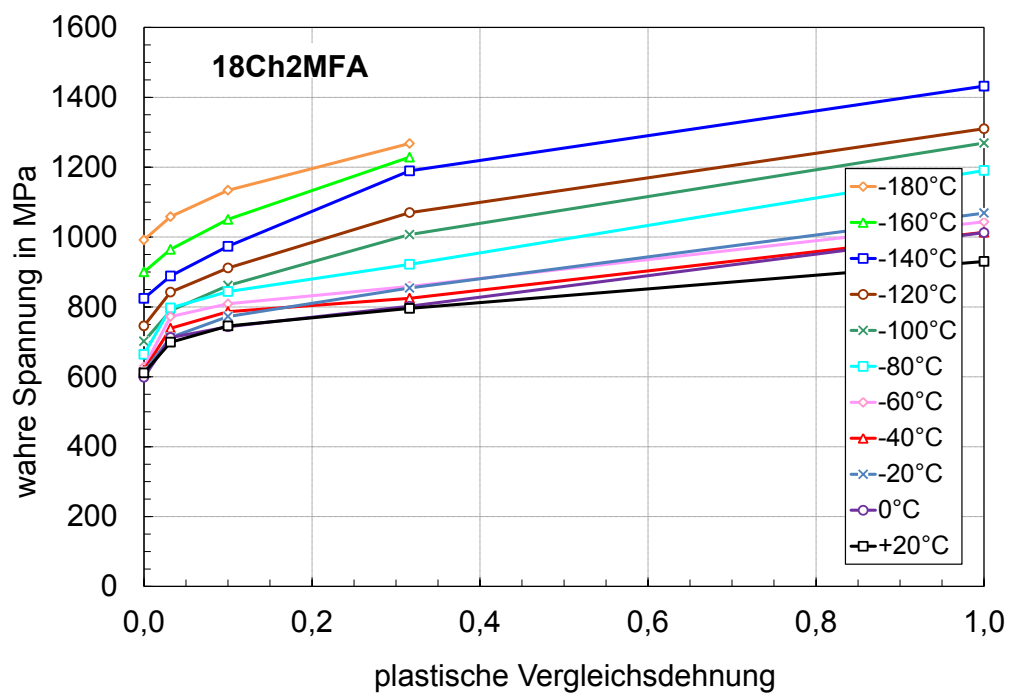


Abbildung 7.11: Mit dem SPT identifizierte Fließkurven (gemittelt) für den Stahl 18Ch2MFA bei Prüftemperaturen von $+20^{\circ}\text{C}$ bis -180°C

7.6.3 Laserschweißnaht

Die Tabelle 7.5 gibt die Mittelwerte der identifizierten Materialparameter für die Laserschweißnaht an. Die zugehörigen Fließkurven zeigt die Abbildung 7.12.

Tabelle 7.5: Aus der F - u -Kurve des SPT identifizierte Parameter (gemittelte Werte) der Spannungs-Dehnungs-Kurve für die Laserschweißnaht

getestetes Material	Temperatur (°C)	E (GPa)	σ_{F0} (MPa)	$\Delta\sigma_1$ (MPa)	$\Delta\sigma_2$ (MPa)	$\Delta\sigma_3$ (MPa)	$\Delta\sigma_4$ (MPa)
Grundwerkstoff	+20	234	406	16	81	251	79
Schmelzzone	+20	209	769	151	76	79	35
Grundwerkstoff	-70	245	470	26	67	258	188
Schmelzzone	-70	207	823	171	126	61	61

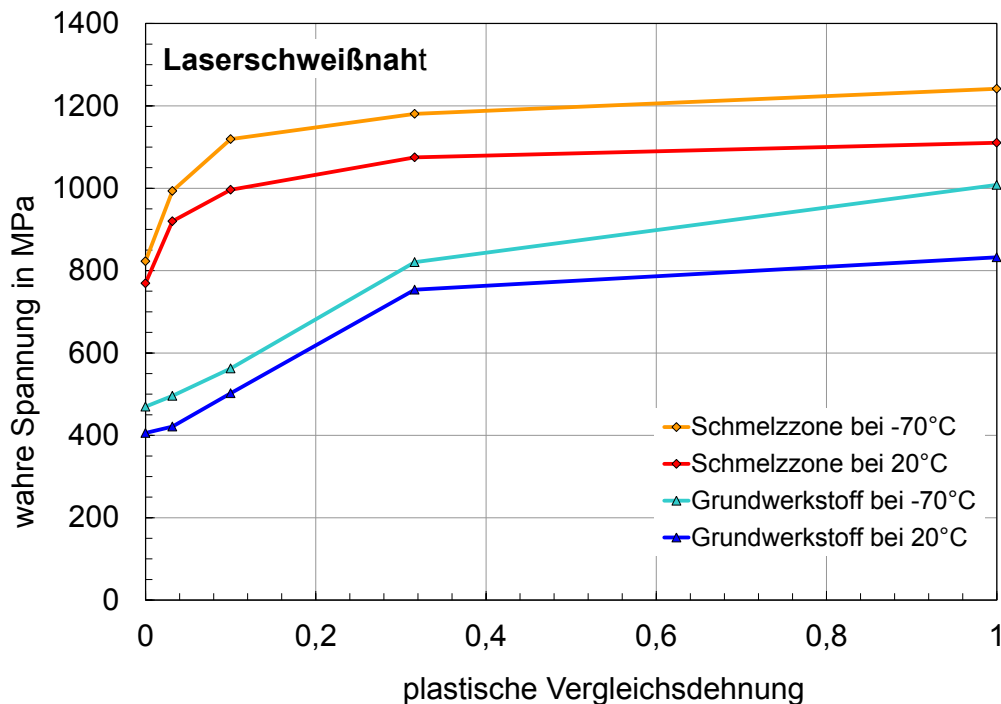


Abbildung 7.12: Mit dem SPT identifizierte Fließkurven (gemittelt) für die Laserschweißnaht

7.6.4 Diskussion

Wie gut die identifizierten Parameter das reale Materialverhalten tatsächlich beschreiben, hängt von verschiedenen Störeinflüssen (man könnte sie auch Abweichung zwischen Realität und Modell nennen) ab, die es ebenfalls zu minimieren gilt, allerdings nicht während der Optimierung, sondern im Vorfeld, und zwar derart, dass Störeinflüsse so weit wie möglich vermieden werden. Hier werden sie als Fragenkatalog formuliert:

- Gibt das FE-Modell die realen Versuchsbedingungen ausreichend genau wieder? (Geometrieabweichungen, Reibung,...)
- Kann die gewählte Fließkurvenparametrisierung die reale Fließkurve des Materials ausreichend genau wiedergeben?
- Haben alle identifizierten Materialparameter einen signifikanten Einfluss auf den Bereich der F - u -Kurve, der für die Identifikation betrachtet wurde?
- Ist der Fehler der RSM-Approximation $\tilde{F}(u, \mathbf{p}) - F(u, \mathbf{p})$ ausreichend klein?

Alle Fragen können mit gutem Gewissen mit „ja“ beantwortet werden. Das FE-Modell wurde im Kapitel 6 auf Qualität getrimmt. Die Fließkurvenbeschreibung wurde nach ausführlicher Betrachtung im Abschnitt 7.2 mit vier linearen Bereichen definiert und die Parametergrenzen so gewählt, dass die gemessenen F - u -Kurven stets innerhalb der oberen und unteren Grenzkurve der Datenbasis liegen. Dass die gewählten Fließkurvenparameter tatsächlich einen signifikanten Einfluss haben, wurde in einer Parameterstudie belegt. Die Parameterschrittweite der Datenbasis wurde gegenüber den Abbildungen 6.9 und 7.4 weiter verringert, sodass bei der schwach nichtlinearen Parameterabhängigkeit und quadratischer Interpolation zwischen den Kurven der Datenbasis der Approximationsfehler des RSM-Modells ausreichend klein ist. Ein Anhaltspunkt dafür ist auch der Surface-Plot der Zielfunktion über zwei Parametern (Abb. 7.8). Obwohl die Parameter mit der vierten Potenz in die Zielfunktion eingehen, der grafische Plot jedoch nur linear zwischen den Punkten interpoliert, ist die dargestellte Zielfunktionsfläche in guter Näherung glatt.

7.7 Verifikation der identifizierten Materialparameter

Die Verifikation der identifizierten Materialparameter soll auf zwei Wegen geschehen. Erstens werden die mit diesen Parametern simulierten F - u -Kurven und die gemessenen F - u -Kurven verglichen. Zweitens erfolgt ein Vergleich mit verfügbaren Referenzkennwerten der Werkstoffe.

7.7.1 Vergleich gemessener mit simulierten Kraft-Verschiebungs-Kurven

Der SPT wurde mit den identifizierten Materialparametern simuliert, wobei diese wie schon bei der Berechnung der Datenbasis in die parametrisierte ABAQUS-Inputdatei (A.3.3) eingesetzt wurden. Die aus der FEM-Simulation erhaltenen F - u -Kurven wurden im Vergleich mit den gemessenen Kurven geplottet. Verwendet wurden die in den Tabellen

7.3, 7.4 und 7.5 angegebenen gemittelten Fließkurven. Die FEM-Simulation erfolgte ohne Berücksichtigung duktiler Schädigung bis zu einer Stempelverschiebung von 2 mm. In die Identifikation ging außer bei den spröde gebrochenen Proben jedoch nicht die gesamte gemessene Kurve, sondern nur der Bereich bis kurz vor dem Kraftmaximum ein. u_{\max} wurde dorthin positioniert, wo der Anstieg der F - u -Kurve den Wert 100 N/mm erstmals unterschreitet. Demzufolge ist der Vergleich nur bis zu dieser Position vor dem Kraftmaximum der simulierten Kurve sinnvoll, der je nach identifiziertem Parametersatz zwischen 1,5 mm und 1,9 mm liegt. Darüber hinaus stellt die simulierte Kurve eine Extrapolation des elastisch-plastischen Materialverhaltens ohne Schädigung der Probe dar.

Die Abbildungen 7.13, 7.14 und 7.15 zeigen ausgewählte Beispiele. Die Abweichung zwischen Experiment und Simulation ist so gering, dass sich die simulierte rote Kurve quasi mit den gemessenen gestrichelten Kurven überdeckt. Die simulierte Kurve repräsentiert eine mittlere Kurve innerhalb der deutlich sichtbaren Streubreite der gemessenen Kurven.

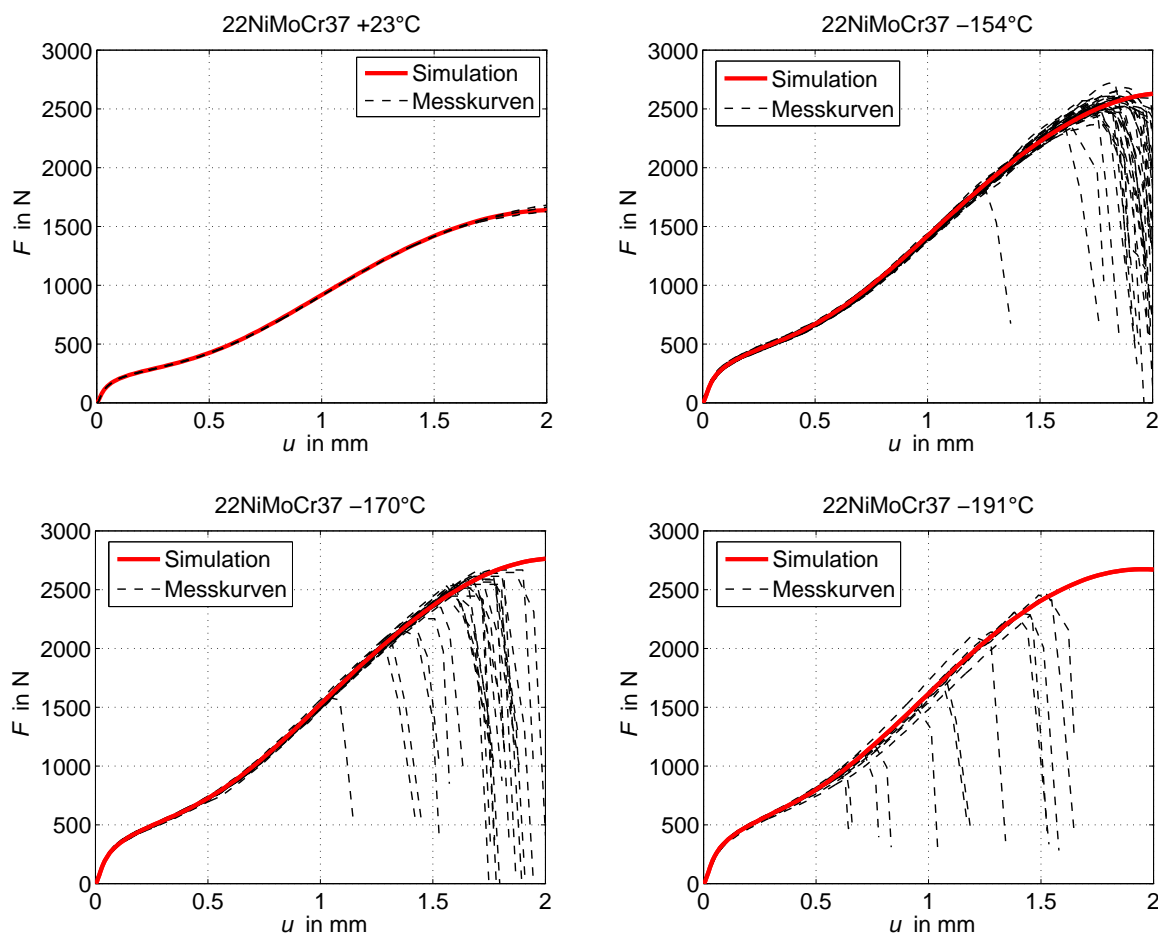


Abbildung 7.13: Vergleich der mit den identifizierten Materialparametern simulierten Kraft-Verschiebungs-Kurven (dickte rote Linie) mit den im SPT gemessenen Kurven (gestrichelte schwarze Linien) im SPT anhand ausgewählter Beispiele für 22NiMoCr37.

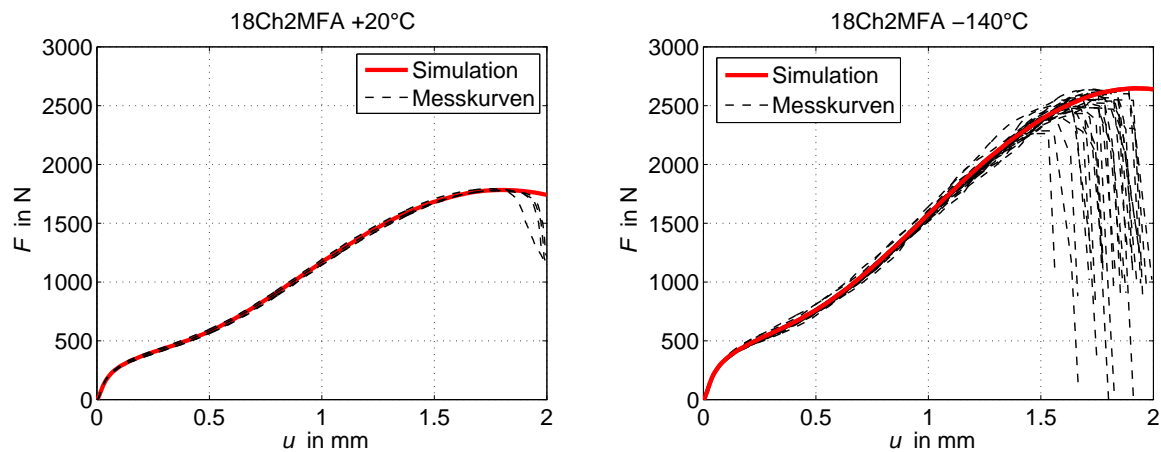


Abbildung 7.14: Vergleich der mit den identifizierten Materialparametern simulierten Kraft-Verschiebungs-Kurven (dicke rote Linie) mit den im SPT gemessenen Kurven (gestrichelte schwarze Linien) anhand ausgewählter Beispiele für 18Ch2MFA.

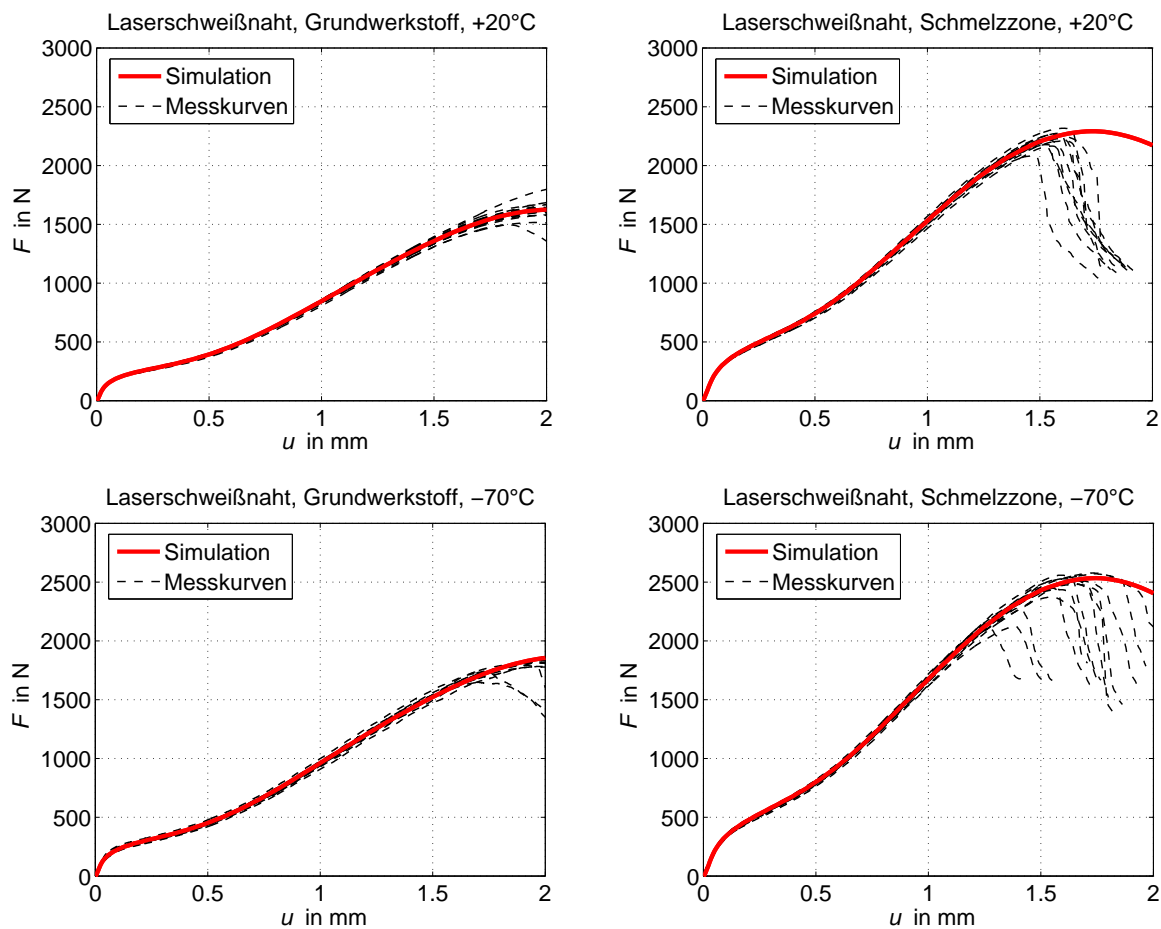


Abbildung 7.15: Vergleich der mit den identifizierten Materialparametern simulierten Kraft-Verschiebungs-Kurven (dicke rote Linie) mit den im SPT gemessenen Kurven (gestrichelte schwarze Linien) für die Laserschweißnaht.

7.7.2 Vergleich identifizierter Fließkurven mit Referenzwerten

Die umfangreichsten Referenzkennwerte stehen für 22NiMoCr37 zur Verfügung. Abbildung 7.16 zeigt den Vergleich der mit dem SPT identifizierten Anfangsfließgrenze σ_{F0} mit der Streckgrenze aus dem Zugversuch. Der SPT unterschätzt die Fließgrenze bei Raumtemperatur um 15 % oder 70 MPa, der Unterschied verringert sich mit sinkender Prüftemperatur und liegt bei 5 % zwischen -90°C und -154°C . Für die beiden tiefen Temperaturen -170°C und -191°C liegen keine Referenzwerte vor. Der Unterschied kann mit der für diesen Stahl sehr ausgeprägten Streckgrenze im einachsigen Zugversuch mit breitem Plateau der Lüdersdehnung und anschließend steilem Anstieg der Fließkurve erklärt werden. Experimente wie der SPT mit inhomogener Plastifizierung über dem Probenquerschnitt zeigen dieses für den Zugversuch typische Verhalten nicht. Demzufolge liegt die Anfangsfließgrenze im SPT niedriger. Das Diagramm 7.18 stellt die Fließkurven aus dem Zugversuch und dem SPT direkt gegenüber.

Auch für den Werkstoff 18Ch2MFA liegen die aus dem SPT identifizierten Fließkurven und Anfangsfließgrenzen etwa 10 % unterhalb der Referenzwerte aus dem Zugversuch bei Raumtemperatur und -140°C (Abb. 7.17 und 7.19).

Im Gegensatz dazu stimmt die Fließgrenze (bei Raumtemperatur) für den Grundwerkstoff der Laserschweißnaht sehr gut überein, die identifizierte Fließgrenze der Schmelzzone dagegen liegt etwa 8 % unter dem Referenzkennwert (siehe Tab. 5.6).

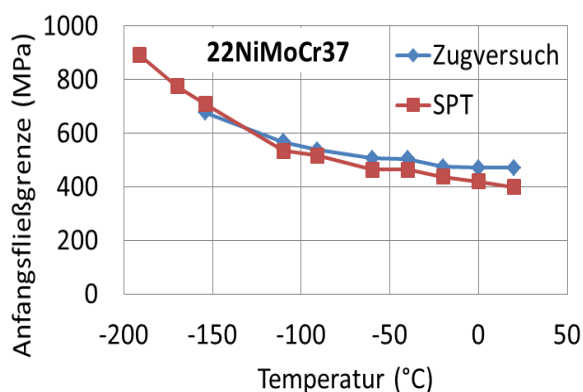


Abbildung 7.16: Gegenüberstellung der temperaturabhängigen Fließgrenze von 22NiMoCr37, identifiziert mit dem SPT und Werte aus dem einachsigen Zugversuch (siehe Tabelle 5.2)

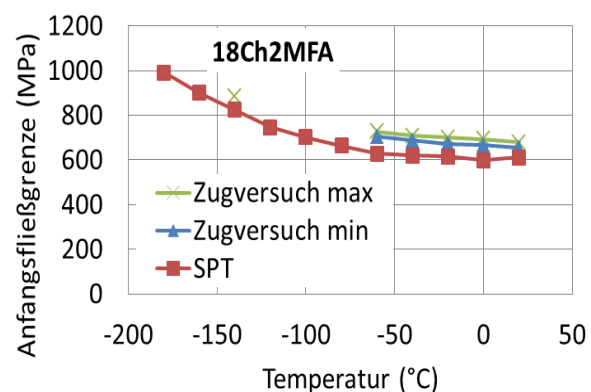


Abbildung 7.17: Gegenüberstellung der temperaturabhängigen Fließgrenze von 18Ch2MFA, identifiziert mit dem SPT und Werte aus dem einachsigen Zugversuch (siehe Tabelle 5.4)

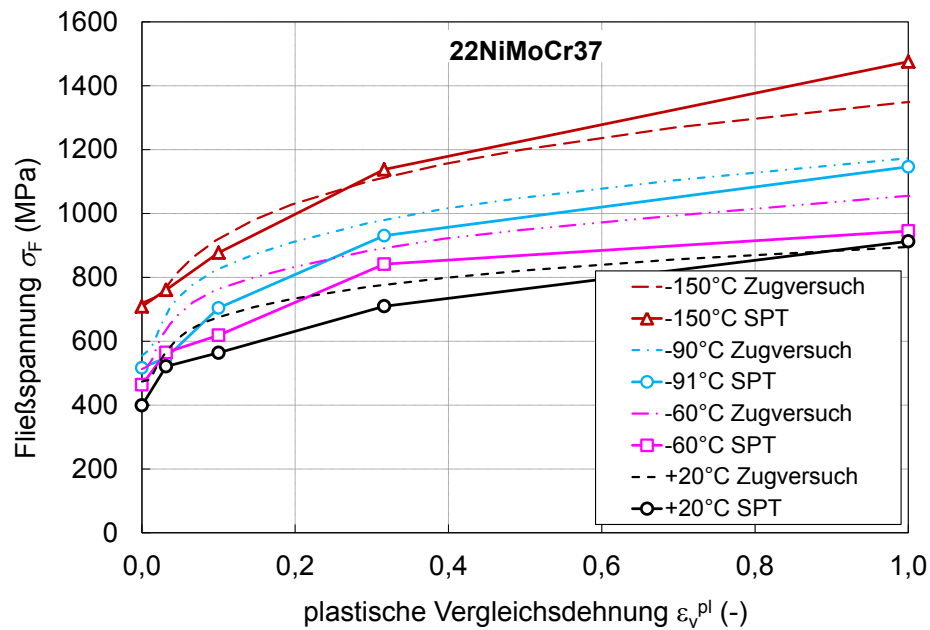


Abbildung 7.18: Vergleich der Fließkurven für 22NiMoCr37 bei mehreren Temperaturen, identifiziert mit dem SPT und dem einachsigen Zugversuch (siehe Abb. 5.5)

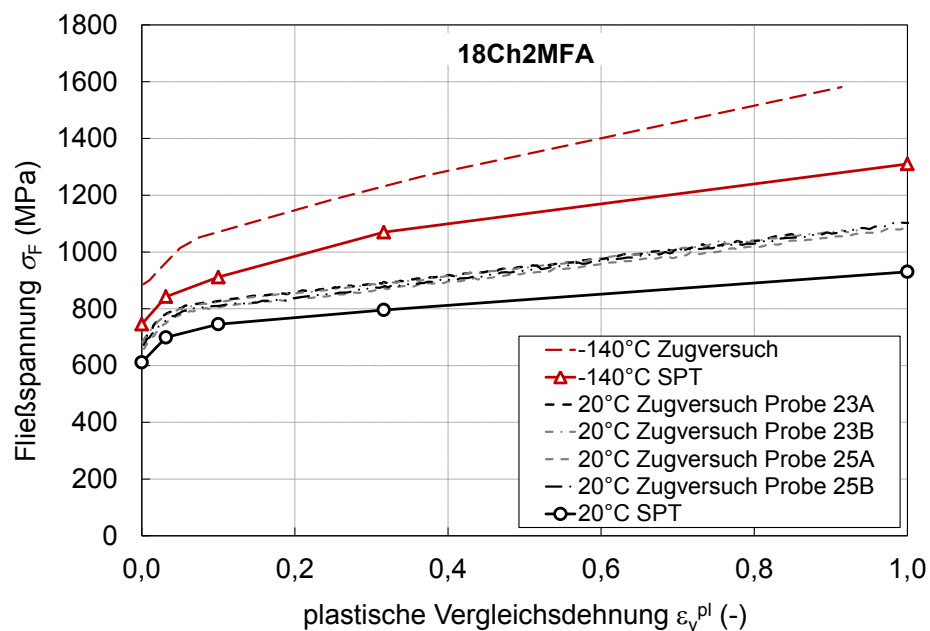


Abbildung 7.19: Vergleich der Fließkurven für 18Ch2MFA bei mehreren Temperaturen, identifiziert mit dem SPT und dem einachsigen Zugversuch (siehe Abb. 5.5)

8 Identifikation probabilistischer Spröbruchparameter

Mit dem SPT wurde eine größere Zahl von Proben aus der Aluminiumoxidkeramik Rubalit 708S bei Raumtemperatur und aus den beiden ferritischen Stählen 22NiMoCr37 und 18Ch2MFA bei tiefen Temperaturen bis zum Versagen durch Spaltbruch belastet, um die Spröbruchfestigkeit der Werkstoffe zu charakterisieren. Die gemessenen Bruchkräfte zeigten die für Spröbruch typische zufällige Streuung. Zwar unterscheiden sich die zugrunde liegenden probabilistischen Versagensmodelle für Keramik (Abschnitt 4.6.2) und ferritische Stähle (Abschnitt 4.6.3), jedoch wird in beiden Fällen die Ausfallwahrscheinlichkeit mit einer Weibull-Verteilung charakterisiert. Deren Parameter werden als Materialparameter angesehen und sollen aus den statistisch streuenden Versagensbeanspruchungen der im SPT belasteten Proben bestimmt werden. Es wird zunächst von einer zweiparametrischen Weibull-Verteilung ohne Schwellwert der Festigkeit ausgegangen, in dieser Form liegen auch Referenzkennwerte für die untersuchten Werkstoffe vor. Die Erweiterung auf eine dreiparametrische Weibull-Verteilung kann sinnvoll sein, wenn aufgrund theoretischer oder empirischer Belege von einer unteren Grenze der Festigkeit ausgegangen werden kann. Im Fall des Spröbruchs von Stahl existieren mehrere Literaturquellen (siehe Abschnitt 4.6.3), die solche Belege liefern.

8.1 Vorbereitung und Durchführung der Weibull-Parameterschätzung

Will man die Weibull-Parameter der Festigkeitsverteilung aus einer Stichprobe von N Versuchen bestimmen, in der Wahrscheinlichkeitstheorie spricht man von Parameterschätzung, so muss das gesamte Spannungsfeld im beanspruchten Volumen der Probe bekannt sein. Im Gegensatz zum klassischen Festigkeitskonzept beinhaltet das Weakest-Link-Konzept der Spröbruchfestigkeit auch eine Abhängigkeit vom beanspruchten Volumen (oder der beanspruchten Oberfläche). Für das Versagen eines herausgegriffenen Volumenelementes kann (ohne fraktographische Beweise) nur eine Wahrscheinlichkeit an-

gegeben werden, die mit der (nicht sichtbaren) Defektgrößenverteilung zusammenhängt. Der Versagensursprung, ein kritischer Defekt, ist zufällig im Volumen verteilt. Die Ausfallwahrscheinlichkeit wird deshalb nicht durch eine lokale Spannung, sondern durch eine für das gesamte Probenvolumen charakteristische Spannung beschrieben. Im Fall der Keramik wird als Zufallsvariable die größte Normalspannung in einem charakteristischen Punkt der Probe, also die größte Biegespannung σ_c , verwendet und dazu das effektiv beanspruchte Probenvolumen V_{eff} angegeben. Im Fall der ferritische Stähle ist die Zufallsvariable die sogenannte Weibullspannung σ_W , die durch Integration über das plastifizierte Probenvolumen erhalten wird. Die Sprödbbruchmodelle wurden bereits im Abschnitt 4.6 beschrieben, weshalb sie hier nicht noch einmal erläutert werden sollen.

Ablauf der Parameterschätzung für Keramik

Die statistische Auswertung der Messungen an Keramikproben orientiert sich an der Norm DIN EN 843-5 [DIN07b], in der die Ausfallwahrscheinlichkeit in Form einer zweiparametrischen Weibull-Verteilung (4.131) der Bruchspannung σ_c mit den Weibull-Parametern b (charakteristische Festigkeit) und m (Weibull-Modul) beschrieben wird. Die Schätzung der Weibull-Parameter erfolgt mit der Maximum-Likelihood-Methode (ML-Methode) und es wird angenommen, dass Volumenfehler versagensauslösend sind. Der prinzipielle Berechnungsablauf für die Schätzung der Weibullparameter wird nun grob skizziert:

1. Spannungsanalyse des SPT mit der FEM: $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$
2. Herausschreiben der maximale Biegespannung in der Probe als Funktion der Stempelkraft: $\sigma_c(F)$
3. Berechnung der Bruchspannungen aus den Bruchkräften der Stichprobe: $\sigma_{ci} = \sigma_c(F_i)$
4. Schätzung der Weibull-Parameter \hat{m} und \hat{b} durch Auswertung der Stichprobe $\sigma_{c1}, \dots, \sigma_{cN}$ mit der ML-Methode und Angabe der Konfidenzintervalle
5. Berechnung des effektiv beanspruchten Volumens V_{eff} als Funktion des geschätzten Weibull-Moduls \hat{m} durch numerische Integration der Äquivalentspannung $\sigma_{\text{eq}}^{\text{FPS}}(\mathbf{x})$ oder $\sigma_{\text{eq}}^{\text{PIA}}(\mathbf{x})$ über dem auf Zug belasteten Probenvolumen V .

Die numerische Integration des effektiven Volumens macht ein etwas aufwendigeres Post-processing der FEM-Spannungsanalyse notwendig. Allerdings braucht V_{eff} bei einem Spannungsfeld, das proportional zur äußeren Belastung ist, nur einmal berechnet werden, da der Quotient $\sigma_{\text{eq}}/\sigma_c$ sich nicht ändert.

Ablauf der Parameterschätzung für Stahl

Für die Berechnung der Weibullspannung $\sigma_W(L)$ im SPT wurde als Lastparameter L die Stempelkraft F gewählt. Der prinzipielle Berechnungsablauf für die Identifikation der Weibull-Parameter m und σ_u des BEREMIN-Modells (4.133) besteht aus folgenden Schritten:

1. Spannungsanalyse des SPT mit der FEM: $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})$.
2. Herausschreiben des Hauptspannungsfeldes (1. Hauptspannung) in der Probe als Funktion der Stempelkraft: $\sigma_1(\boldsymbol{x}, F)$.
3. Ermittlung der Bruchkräfte der Stichprobe: F_i .
4. Berechnung der lastabhängigen Weibull-Spannung $\sigma_W(F)$ durch numerische Integration der positiven 1. Hauptspannung über dem plastifizierten Probenvolumen für einen Startwert des Weibull-Moduls m .
5. Berechnung der Weibull-Spannung für die Bruchkräfte der Stichprobe: $\sigma_{W_i} = \sigma_W(F_i)$.
6. Schätzung der Weibull-Parameter \hat{m} und $\hat{\sigma}_u$ durch Auswertung der Stichprobe $\sigma_{W1}, \dots, \sigma_{WN}$ mit der ML-Methode.
7. Wenn der Schätzwert \hat{m} mit dem Startwert innerhalb einer Fehlerschranke übereinstimmt, dann werden die geschätzten Weibull-Parameter akzeptiert. Andernfalls wird die Berechnung ab Punkt 4 mit \hat{m} als neuem Startwert wiederholt.

Weil das Spannungsfeld aufgrund des plastischen Materialverhaltens nichtlinear mit der Stempelkraft skaliert, muss es für eine größere Zahl von Stempelkraftwerten ausgewertet werden, um so den nichtlinearen Verlauf $\sigma_W(F)$ durch mehrere Datenpunkte approximieren zu können. Für den SPT wurde deshalb für jeden Zeitschritt der FEM-Simulation (bzw. für jedes Verschiebungsinkrement von maximal 0,02 mm) das Hauptspannungsfeld herausgeschrieben. Die numerische Integration muss dann mehrfach durchgeführt werden, bis die Iterationsschleife gegen einen stabilen Schätzwert \hat{m} konvergiert. Das Problem des BEREMIN-Modells gegenüber dem Sprödbbruchmodell von Keramik besteht darin, dass per Definition die Zufallsvariable σ_W vom Schätzwert des Parameters m abhängt. In jeder Iteration wird also eine neue Stichprobe $\sigma_{W1}, \dots, \sigma_{WN}$ generiert.

8.2 Numerische Berechnung der Weibull-Spannung und des effektiven Volumens

Die numerische Integration der Weibull-Spannung σ_W erfolgt in einem der FEM-Analyse nachgeschalteten Auswerteprogramm durch Summation über dem Volumen aller plastifizierten Elemente. Es werden die Spannungen in den Integrationspunkten ip der Elemente el des FE-Modells verwendet. Sie besitzen die größte Genauigkeit. Um numerische Probleme, die bei großem Weibull-Exponenten m auftreten können, zu umgehen, wird die maximale Hauptspannung in den Integrationspunkten mit der größten maximalen Hauptspannung in der Probe $\sigma_{1\max}$ normiert. Die Berechnungsvorschrift für die numerische Berechnung der Weibull-Spannung in (4.135) lautet:

$$\sigma_W = \sigma_{1\max} \sqrt[m]{\sum_{el=1}^{n_{el}} \left(\frac{\sigma_{W,el}}{\sigma_{1\max}} \right)^m}, \quad (8.1a)$$

$$\sigma_{W,el} = \sigma_{1\max} \sqrt[m]{\sum_{ip=1}^{n_{ip}} \left(\frac{\sigma_{eq}(\mathbf{x}_{ip})}{\sigma_{1\max}} \right)^m \frac{V_{ip}}{V_0}} \quad (8.1b)$$

$$\text{mit } \sigma_{eq}(\mathbf{x}_{ip}) = \begin{cases} 0 & \text{für } \varepsilon_V^{\text{pl}}(\mathbf{x}_{ip}) = 0 \\ \left\langle \max_{0 \leq \tau \leq t} (\sigma_1(\mathbf{x}_{ip}, \tau)) \right\rangle & \text{für } \varepsilon_V^{\text{pl}}(\mathbf{x}_{ip}) > 0 \end{cases} \quad (8.1c)$$

Es werden nur positive Hauptspannungen (ausgedrückt durch die FÖPPL-Klammern bzw. MCCAULEY-Klammern $\langle \cdot \rangle$) in den plastifizierten Elementen berücksichtigt und es wird in jedem Integrationspunkt \mathbf{x}_{ip} die höchste in der Belastungsgeschichte $0 \leq \tau \leq t$ erreichte maximale Hauptspannung verwendet. Die verwendeten zweidimensionalen quadratischen Elemente mit reduzierter Integration besitzen $n_{ip} = 4$ Integrationspunkte.

Die Berechnungsvorschrift für das effektive Volumen von Keramik ist etwas einfacher. Die Integration von (4.129) erfolgt durch Summation über die auf Zug beanspruchten Volumenelemente:

$$V_{\text{eff}} = \sum_{el=1}^{n_{el}} V_{\text{eff},el}, \quad (8.2a)$$

$$V_{\text{eff},el} = \sum_{ip=1}^{n_{ip}} \left(\frac{\sigma_{eq}(\mathbf{x}_{ip})}{\sigma_c} \right)^m V_{ip}. \quad (8.2b)$$

$$\text{mit } \sigma_{eq}(\mathbf{x}_{ip}) = \sigma_{eq}^{\text{FPS}}(\mathbf{x}_{ip}) \quad \text{oder} \quad \sigma_{eq}(\mathbf{x}_{ip}) = \sigma_{eq}^{\text{PIA}}(\mathbf{x}_{ip}). \quad (8.2c)$$

8.3 Weibull-Parameter für Aluminiumoxid-Keramik

Im SPT wurde bei Raumtemperatur die Festigkeit von 30 Keramikproben aus Rubalit 708S geprüft, siehe Abschnitt 5.6.2. Mit der gleichen Stichprobengröße von jeweils $N = 30$ Proben wurden an der Montanuniversität Leoben Referenzexperimente mit dem 4-Punkt-Biegeversuch (4PB) [DIN07a] und dem 4-Kugel-Versuch (Ball-on-three-balls-Test (B3B)) [Bör02, Bör04, Dan03, Dan07] durchgeführt (siehe Abschnitt 5.3.4). Während der 4PB als Standardprüfverfahren für Keramikwerkstoffe etabliert ist, stellt der B3B ein relativ neues Prüfverfahren für die biaxiale Festigkeitsprüfung von Keramikscheiben dar. Die geprüften 4-Punkt-Biegebalken besitzen mit einer Breite von 2,7 mm und einer Dicke von 1,5 mm etwas kleinere Abmessungen, als es die DIN-Norm vorsieht. Die Ober- und Unterseite wurden im „as-sintered“-Zustand belassen. Die Seitenflächen wurden poliert, um bruchauslösende Herstellungsfehler (Kantendefekte) zu beseitigen. Die B3B-Proben wurden in exakt der gleichen Weise wie die SPT-Proben aus der gleichen Charge hergestellt. Ein direkter Vergleich zwischen SPT und B3B ist deshalb besonders interessant, da mögliche Einflüsse der Probenherstellung auf die Festigkeit ausgeschlossen werden können.

Die statistische Unsicherheit der Parameterschätzwerte für jede Stichprobe wird durch die 90%-Konfidenzintervalle charakterisiert, deren Berechnung in der Norm [DIN07b] ausführlich beschrieben ist. Überlappen sich die Konfidenzintervalle zweier Stichproben, so kann angenommen werden, dass sie der gleichen statistischen Grundgesamtheit angehören. Während der Weibull-Modul direkt verglichen werden kann, muss die charakteristische Festigkeit erst auf das gleiche effektiv beanspruchte Volumen umgerechnet werden. Durch Umstellen von Gleichung (4.132) erhält man die Beziehung, mit der die Probenfestigkeit direkt auf das Referenzvolumen V_0 umgerechnet werden kann:

$$\sigma_0 = b \left(\frac{V_{\text{eff}}}{V_0} \right)^{1/m}, \quad (8.3a)$$

$$\sigma_{cV} = \sigma_c \left(\frac{V_{\text{eff}}}{V_0} \right)^{1/m}. \quad (8.3b)$$

σ_{cV} ist die für eine einachsigen Zugprobe des Volumens V_0 vorhergesagte Sprödbbruchfestigkeit mit gleicher Ausfallwahrscheinlichkeit wie die im Experiment gemessene Festigkeit und σ_0 die für den Zugversuch vorhergesagte charakteristische Festigkeit mit 63%-Ausfallwahrscheinlichkeit. Erst durch diese Umrechnung wird die Abhängigkeit der Festigkeit von der Probengröße und dem Beanspruchungszustand berücksichtigt und der quantitative Vergleich von Festigkeitswerten aus unterschiedlichen Experimenten sinnvoll. Die Ergebnisse der Parameterschätzung sind in Tabelle 8.1 zusammengefasst. Die Berechnung des effektiv beanspruchten Volumens und der auf das Referenzvolumen $V_0 = 1 \text{ mm}^3$

Tabelle 8.1: Ergebnisse der Parameterschätzung für die Weibull-Verteilung der Festigkeit im SPT und in den beiden Referenzversuchen bei einer Stichprobengröße von $N = 30$ (90%-Konfidenzintervalle in eckigen Klammern) sowie effektives Volumen und Festigkeit bezüglich V_0 berechnet mit der Äquivalentspannung nach dem PIA-Kriterium für unkorrigierten und korrigierten Schätzwert \hat{m} und \hat{m}_{cor} .

	SPT		B3B		4PB	
\hat{m}_{cor}	12,0 [9,4; 15,3]		15,5 [12,1; 19,7]		14,3 [11,3; 18,3]	
\hat{b} (MPa)	607 [591; 624]		694 [680; 709]		366 [358; 375]	
	\hat{m}	\hat{m}_{cor}	\hat{m}	\hat{m}_{cor}	\hat{m}	\hat{m}_{cor}
m	12,5	12,0	16,1	15,5	15,0	14,3
$V_{\text{eff}}^{\text{PIA}}$ (mm ³)	0,00306	0,00340	0,00185	0,00206	1,373	1,438
σ_0^{PIA} (MPa)	383	378	471	465	374	376

bezogenen charakteristischen Festigkeit erfolgte nach dem PIA-Kriterium, welches die Mehrachsigkeit des Zugspannungszustandes berücksichtigt. Verwendet man nur die größte Hauptnormalspannung (FPS-Kriterium), so wird für den SPT ein um 23 % kleineres effektives Volumen und infolgedessen auch eine um 3,3 % kleinere Referenzfestigkeit σ_0 berechnet. Im einachsigen 4PB dagegen liefern beide Kriterien das gleiche Ergebnis.

Die Festigkeitsdaten wurden in zwei Weibull-Diagrammen in Abbildung 8.1 dargestellt. Die Abweichungen von einer geraden Linie im Weibull-Diagramm sind bei allen drei Experimenten klein, sodass die Annahme einer weibullverteilten Festigkeit berechtigt war. Der Probengroßeneinfluss der Festigkeit ist im linken Diagramm deutlich erkennbar. Offensichtlich werden im B3B, der das kleinste effektive Volumen aufweist, auch die höchsten Festigkeitswerte erzielt. Umgedreht sind die Festigkeitswerte für den 4PB, der ein um drei Größenordnungen größeres effektives Volumen aufweist, mit Abstand am kleinsten. Das

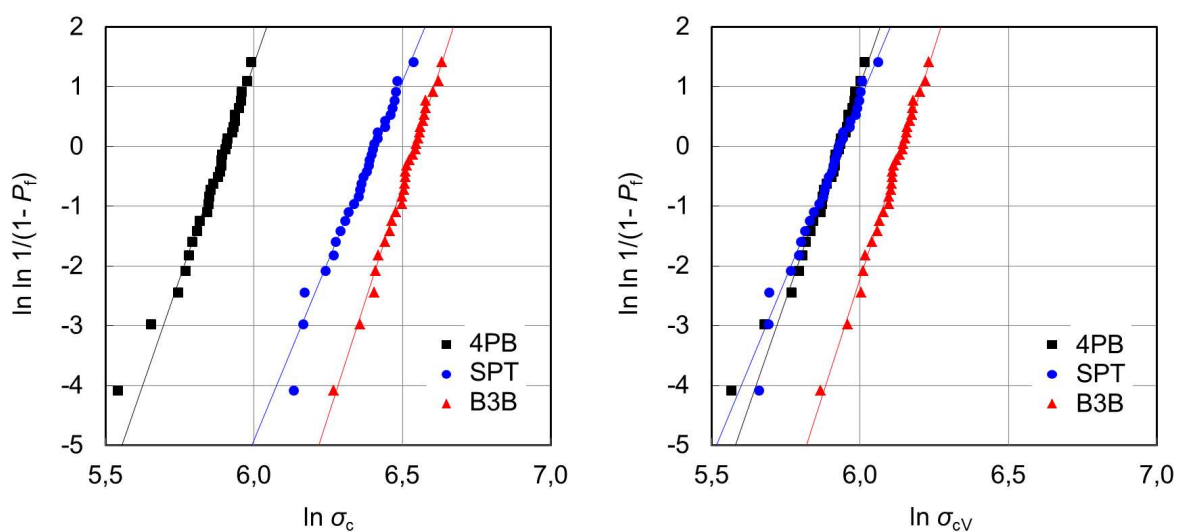


Abbildung 8.1: Weibull-Diagramme der Festigkeitsverteilung für SPT, B3B und 4PB. Links ist die gemessene Biegefestigkeit σ_c dargestellt, rechts die bezüglich des Referenzvolumens $V_0 = 1 \text{ mm}^3$ mit \hat{m}_{cor} und dem PIA-Kriterium umgerechnete Festigkeit σ_{cV} .

rechte Diagramm wird erhalten, wenn die Festigkeitswerte mit Gleichung (8.3b) bezüglich des Referenzvolumens $V_0 = 1 \text{ mm}^3$ umgerechnet werden. Allerdings sind die darin enthaltenen Datenpunkte auf Parameterschätzwerten beruhende Volumensextrapolationen der Festigkeit (also eine Vorhersage des Sprödbbruchmodells), die genauso wie die Weibull-Parameter und das damit berechnete effektive Volumen mit einer statistischen Unsicherheit behaftet sind. Die Datenpunkte im linken Weibull-Diagramm sind dagegen eine Repräsentation der Messergebnisse, sie werden nicht vom Modell beeinflusst.

Eine besser geeignete Darstellung, welche den Vergleich unterschiedlicher Experimente ermöglicht, zeigt Abbildung 8.2. In der doppeltlogarithmischen Auftragung der charakteristischen Probenfestigkeit und des effektiven Volumens wird eine Stichprobe als Punkt dargestellt. Wenn das probabilistische Sprödbbruchmodell korrekte Vorhersagen liefert, also nicht nur die statistische Streuung, sondern auch die Volumenabhängigkeit der Festigkeit korrekt beschreibt, so müssen die Punkte, welche unterschiedliche Experimente repräsentieren, annähernd auf einer fallenden Geraden liegen, deren Anstieg durch den Weibull-Modul beschrieben wird. Berücksichtigt man die Konfidenzintervalle, die gestrichelten Linien im Diagramm, so sind die drei Experimente konsistent mit der Weibull-Theorie. Um für eine konservative Festigkeitsvorhersage auf der sicheren Seite zu sein, würde man die unteren gestrichelten Linien im Diagramm verwenden.

Im direkten Vergleich zwischen SPT und B3B scheint ein signifikanter Unterschied zwischen den beiden Experimenten plausibel, zumal identische Proben geprüft wurden. Jedoch zeigt Abbildung 8.1 links einen großen Überlappungsbereich der gemessenen Festigkeiten, sodass dies auch zufälliger Natur sein kann. Eine statistisch signifikante Absicherung würde einen viel größeren Stichprobenumfang erfordern.

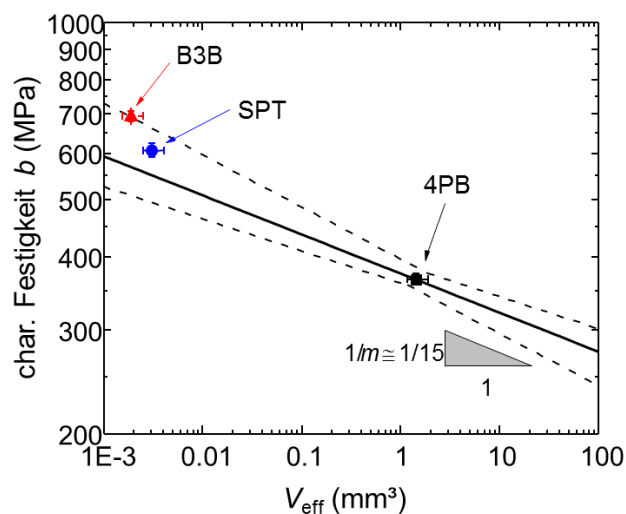


Abbildung 8.2: Doppelt logarithmischer Plot der charakteristischen Festigkeit über dem effektiven Volumen für SPT, B3B und 4PB. Die schwarze Gerade zeigt den von der Weibull-Theorie vorhergesagten Größeneffekt der Festigkeit für $m = 15$. Die gestrichelten Linien repräsentieren die Konfidenzintervalle.

8.4 Weibull-Parameter des BEREMIN-Modells für Stahl

Für die Bestimmung der Weibull-Parameter des BEREMIN-Modells müssen die Versuche bei einer Temperatur durchgeführt werden, bei der Spaltbruch überwiegt und duktile Schädigung vernachlässigbar ist. Die untersuchten Stähle zeigten im SPT nur bei sehr tiefen Temperaturen ab etwa -140°C sprödes Bruchverhalten. Die Proben aus 22NiMoCr37 versagten bei -191°C und -170°C alle mit plötzlichem Kraftabfall und die Bruchflächen wiesen reinen Spaltbruch auf. Dagegen wurden bei -154°C mehrere Proben mit Mischbruchverhalten beobachtet, wobei der Anteil des Spaltbruchs und des duktilen Wabenbruchs bei den einzelnen Proben unterschiedlich ausgeprägt war. Es traten Proben auf, die ideal spröd versagten, andere zeigten einen geringen Anteil von Wabenbruch und weitere wiesen einen größeren Wabenbruchanteil auf. In letzterem Fall verzeichneten die F - u -Kurven nach dem Kraftmaximum noch einen stetigen Kraftabfall, bevor der für Spaltbruch typische plötzliche Kraftabfall eintrat. Die Proben aus 18Ch2MFA wiesen analog bei -180°C und -160°C reinen Sprödbbruch auf. Bei -140°C gab es Proben mit Mischbruchverhalten, allerdings mit einem sehr geringen Wabenbruchanteil, die meisten Proben versagten direkt nach dem Kraftmaximum mit plötzlichem Kraftabfall. Abbildung 8.3 zeigt die F - u -Kurven und nennt die Anzahl der offensichtlich spröde versagten Proben.

Die Parameterschätzung für das BEREMIN-Modell erfolgt nun für die jeweils drei tiefsten Prüftemperaturen der beiden Stähle, bei denen Sprödbbruch auftrat. Bei der dritt tiefsten Prüftemperatur werden nur die Proben einbezogen, die reines Sprödbbruchverhalten aufwiesen beziehungsweise deren F - u -Kurve bis zum Versagenszeitpunkt auch noch ohne die Einbeziehung duktiler Schädigung mit den im Kapitel 7 identifizierten Fließkurvenparametern nachgerechnet werden kann.

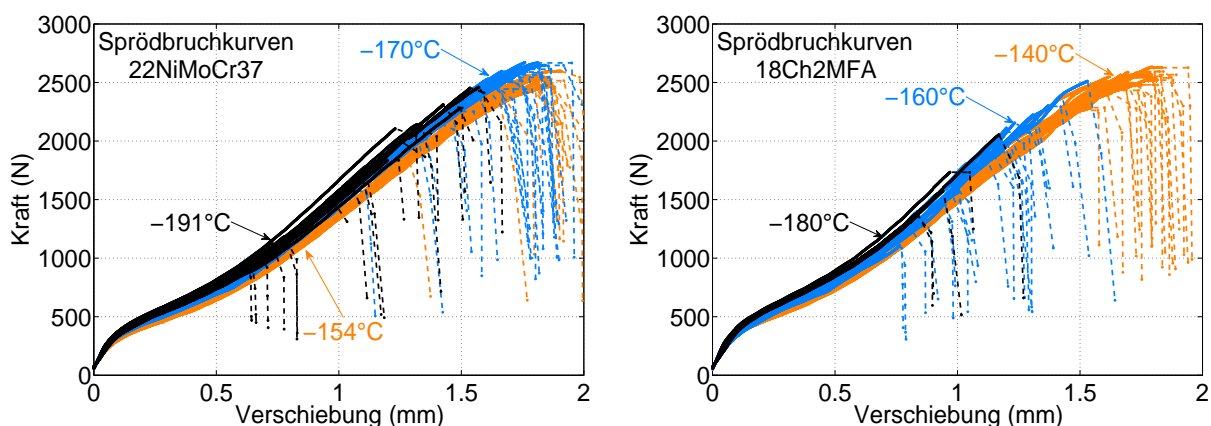


Abbildung 8.3: Kraft-Verschiebungs-Kurven, bei denen Sprödbbruch mit plötzlichem Kraftabfall eintrat. Links: 22NiMoCr37, 20 Proben bei -191°C , 30 Proben bei -170°C und 15 von 40 Proben bei -154°C . Rechts: 18Ch2MFA, 5 Proben bei -180°C , 27 Proben bei -160°C und 22 von 28 Proben bei -140°C .

8.4.1 Ergebnisse 22NiMoCr37

Die Ergebnisse der iterativen Parameterschätzung mit der ML-Methode für die SPT-Versuche bei -191°C und -170°C zeigen die Abbildungen 8.4 und 8.5. Das Bezugsvolumen wurde wie bei verfügbaren Referenzdaten mit $V_0 = 0,001\text{ mm}^3$ gewählt. Die Referenzwerte, ebenfalls mit der ML-Methode bestimmt, stammen aus statischen Zugversuchen an gekerbten Rundzugproben [Ber99] und sind in Tabelle 8.2 zusammengestellt.

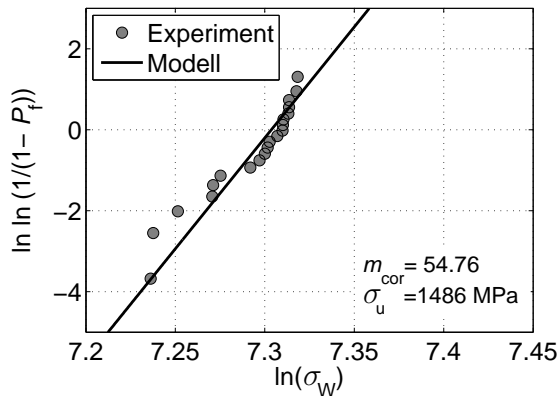


Abbildung 8.4: 22NiMoCr37 bei -191°C im SPT, Weibull-Diagramm ($N = 20$) mit Parameterschätzwerten für das BEREMIN-Modell

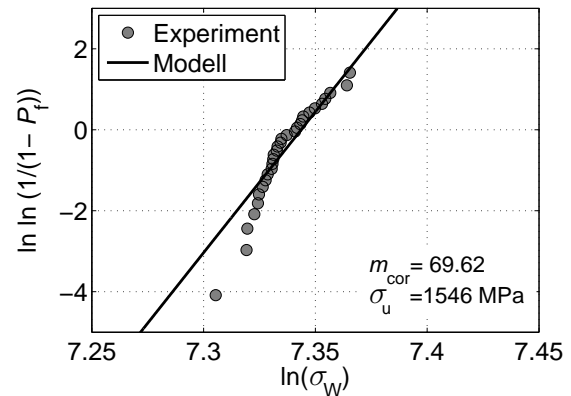


Abbildung 8.5: 22NiMoCr37 bei -170°C im SPT, Weibull-Diagramm ($N = 30$) mit Parameterschätzwerten für das BEREMIN-Modell

Tabelle 8.2: Referenzwerte der Weibull-Parameter für 22NiMoCr37 aus dem Zugversuch [Ber99]

Temperatur ($^\circ\text{C}$)	Anzahl	90%- Konfidenzintervall		90%- Konfidenzintervall		
		$\hat{\sigma}_u$ (MPa)		\hat{m}	\hat{m}_{cor}	
-120	13	1799	1789 – 1809	103	91,8	62,8 – 135
-150	8	1962	1936 – 1990	56,1	46,0	27,8 – 77,8
-196	19	1932	1910 – 1954	38,8	36,0	26,5 – 49,2

Die Parameterschätzung für die SPT-Versuche bei -154°C gestaltet sich etwas aufwendiger, da für das BEREMIN-Modell nur die 15 Versuche in die Auswertung einbezogen werden können, bei denen der duktile Verformungs- und Versagensanteil vernachlässigbar klein ist. Führt man für diese Untermenge N_1 der gesamten Stichprobe aus $N = 40$ Versuchen die zuvor angewandte iterative Parameterschätzung mit der ML-Methode durch, erhält man das Ergebnis in Abbildung 8.6. Durch das inkorrekte Zensieren der Stichprobe wird der Anstieg der Weibull-Geraden, also m , überschätzt bzw. die Festigkeitsstreuung unterschätzt und gleichzeitig auch die Referenzspannung σ_u unterschätzt. Besser ist es, den spröde versagenden Stichprobenanteil einer abgeschnittenen Verteilungsfunktion zuzuordnen, so als ob das SPT-Experiment bei einer bestimmten Last abgebrochen worden wäre, bis zu der nur Sprödbbruch auftritt. Die gesamte Stichprobe vom Umfang N , d.h. die

Zahl aller Versuche bei einer Temperatur, wird also in zwei Untergruppen vom Umfang N_1 und N_2 unterteilt, wobei N_1 die Zahl der spröde gebrochenen Proben ist. Dann wird den spröden Proben die empirische Ausfallwahrscheinlichkeit (Median-Rank-Schätzer (4.145)) $P_{fi} = (i - 0,3)/(N + 0,4)$ für $i = 1 \dots N_1$ zugeordnet. Diese Unterteilung der Stichprobe ist gerechtfertigt, das folgende Gedankenexperiment soll das untermauern:

- Ohne den zweiten, konkurrierenden duktilen Versagensmechanismus ließe sich die Probenbelastung weiter steigern, bis auch die restlichen Proben spröde Versagen würden.
- Für diese fiktiven größeren Versagenslasten würde man auch eine größere Weibull-Spannung $\sigma_W > \sigma_{WN_1}$ berechnen und ihnen die Ausfallwahrscheinlichkeit $P_{fi} = (i - 0,3)/(N + 0,4)$ für $i = N_1 + 1, \dots, N_1 + N_2$ zuordnen.

Weil der tatsächliche Versagensmechanismus jedoch eine Mischung aus spröde und duktil ist, erfolgt die Schätzung der Weibull-Parameter nur für den aufgrund experimenteller Beweise spröde versagenden Stichprobenanteil, dem im Weibull-Diagramm die ersten N_1 von N Datenpunkten zugeordnet sind. Die Datenpunkte mit größerer Ausfallwahrscheinlichkeit werden einfach ausgeblendet, da sie die Beanspruchung σ_{WN_1} ohne Versagen überlebt haben. Die Parameterschätzwerte können dann aber nicht mehr durch Lösung des ML-Gleichungssystems (4.141) erhalten werden, denn dieses liefert nur korrekte Ergebnisse für eine unzensierte Stichprobe. Als simple Alternative bietet sich die Methode der kleinsten Quadrate an, um einen Geradenfit für die N_1 Punkte im Weibull-Diagramm durchzuführen, diese Methode wird auch Median-Rank-Regression (MRR) genannt [Abe10]. Wie bei der ML-Methode muss auch bei der MRR-Methode die Parameterschätzung iterativ erfolgen, da die σ_{Wi} vom Schätzwert \hat{m} abhängig sind. Das Ergebnis zeigt Abbildung 8.7.

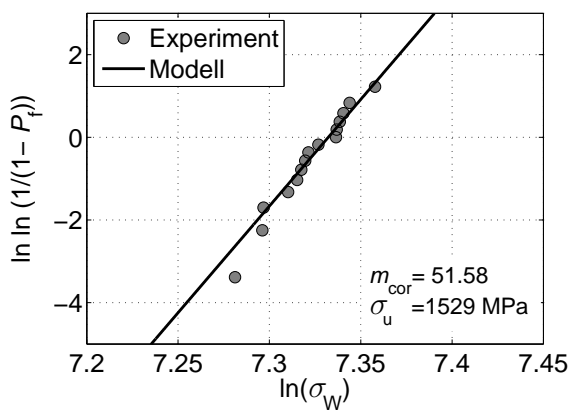


Abbildung 8.6: Weibull-Diagramm der Sprödbrechereignisse ($N = N_1 = 15$) von 22NiMoCr37 im SPT bei -154°C mit Parameterschätzwerten und Weibull-Gerade bei Verwendung der ML-Methode und inkorrektter Zensierung

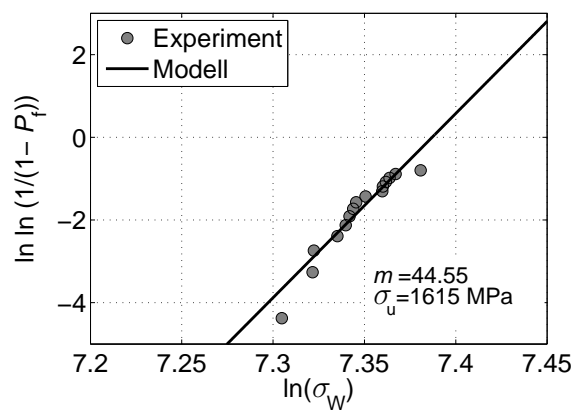


Abbildung 8.7: Weibull-Diagramm der rechts zensierten Sprödbrechereignisse ($N = 40, N_1 = 15$) von 22NiMoCr37 im SPT bei -154°C mit Parameterschätzwerten und Weibull-Gerade bei Verwendung der MRR-Methode.

8.4.2 Ergebnisse 18Ch2MFA

Das Referenzvolumen wurde ebenfalls mit $V_0 = 0,001 \text{ mm}^3$ festgelegt. Die Ergebnisse der Parameterschätzung für die SPT-Versuche bei -180°C und -160°C zeigen die Abbildungen 8.8 und 8.9.

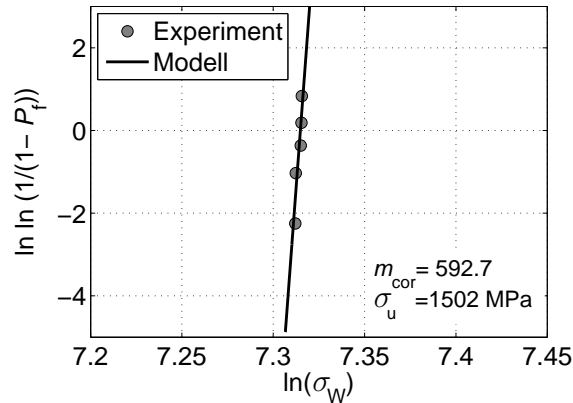


Abbildung 8.8: Weibull-Diagramm für 18Ch2MFA bei -180°C im SPT mit Ergebnis der Parameterschätzung ($N = 5$)

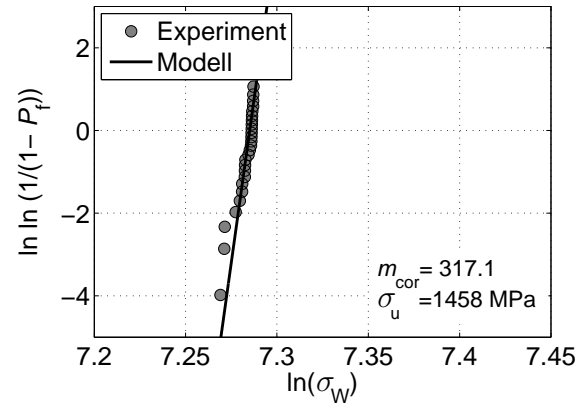


Abbildung 8.9: Weibull-Diagramm für 18Ch2MFA bei -160°C im SPT mit Ergebnis der Parameterschätzung ($N = 27$)

Die Parameterschätzung für -140°C wird analog zur Auswertung der spröduktile Versagensereignisse von 22NiMoCr37 bei -154°C vorgenommen. Bei Zensierung der Stichprobe und Verwendung der ML-Methode erhält man das Ergebnis in Abbildung 8.10. Bei rechts zensierten Daten für eine nach oben abgeschnittene Weibull-Verteilung und Geradenfit mit der Methode der kleinsten Quadrate im Weibull-Diagramm wird das Ergebnis in Abbildung 8.11 erhalten.

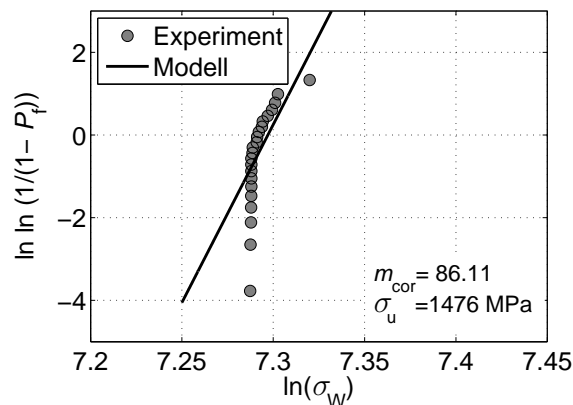


Abbildung 8.10: Weibull-Diagramm der Spröbruchereignisse ($N = N_1 = 22$) von 18Ch2MFA im SPT bei -140°C mit Parameterschätzwerten und Weibull-Gerade bei Verwendung der ML-Methode und inkorrektter Zensierung

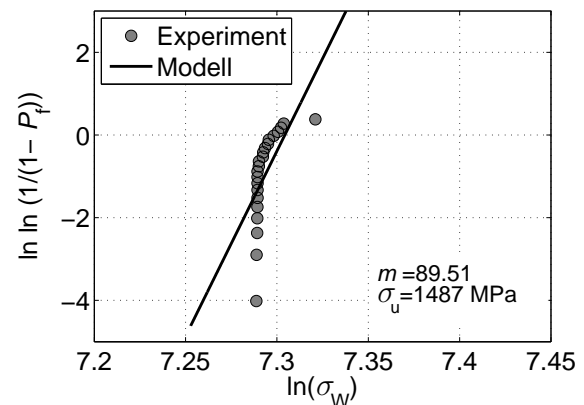


Abbildung 8.11: Weibull-Diagramm der rechts zensierten Spröbruchereignisse ($N = 28, N_1 = 22$) von 18Ch2MFA im SPT bei -140°C mit Parameterschätzwerten und Weibull-Gerade bei Verwendung der MRR-Methode.

Referenzwerte für die Weibull-Parameter konnten nur bei -140°C ermittelt werden. Dazu wurden an 29 gekerbten Rundzugproben (Probendurchmesser 10 mm, Kerbgrunddurchmesser 6 mm, Kerbradius 1 mm) Zugversuche am GKSS Forschungszentrum Geesthacht (Dr. Heerens) durchgeführt. Alle Proben versagten spröde. Diese Versuche wurden dann mit der FEM unter Verwendung der Fließkurve aus dem Zugversuch (Abb. 5.7) bis zum Versagenszeitpunkt simuliert und der Spannungszustand bei der Versagenslast mit der gleichen Auswerteprozedur wie sie beim SPT angewandt wird, ausgewertet. Die Versuche sind im Anhang A.2.2 dokumentiert. Die ermittelten Referenzwerte der Weibull-Parameter für 18Ch2MFA bei -140°C sind $\hat{\sigma}_u = 3395 \text{ MPa}$ und $\hat{m}_{\text{cor}} = 13,79$ (90%-Konfidenzintervalle: $3317 \text{ MPa} < \sigma_u < 3475 \text{ MPa}$, $10,8 < m < 17,6$).

8.4.3 Diskussion und numerische Studie

Die aus den SPT-Ergebnissen bestimmten Weibull-Parameter des BEREMIN-Modells weichen offensichtlich von den zur Verfügung stehenden Vergleichswerten aus Versuchen an gekerbten Rundzugproben ab. Die Weibull-Referenzspannung σ_u wird systematisch unterschätzt. Im SPT liegt sie nur bei 44% bis 82% der verfügbaren Vergleichswerte. Auch der geschätzte Weibull-Modul¹ liegt im Mittel höher als bei den Vergleichswerten. Erstaunlich sind die sehr hohen Schätzwerte für 18Ch2MFA mit praktisch fast keine Streuung der σ_{W_i} , obwohl die Bruchkräfte (siehe Abb. 8.3) eine deutlich erkennbare Streuung aufweisen. Die beste Übereinstimmung wurde für 22NiMoCr37 bei -154°C erzielt. Hier liegen die Schätzwerte $\hat{m} = 45$ im SPT und $\hat{m} = 46$ im Zugversuch sogar sehr dicht beieinander und $\hat{\sigma}_u$ im SPT mit 1615 MPa nur 18% unterhalb dem Wert 1962 MPa im Zugversuch.

Mögliche Ursachen der festgestellten Abweichungen sollen nun anhand vergleichender numerischer Studien untersucht werden. Zunächst wird der Einfluss des Weibull-Moduls auf σ_W und damit auch auf den Parameter σ_u betrachtet. Abbildung 8.12 zeigt aufgetragen über der Stempelverschiebung im SPT bzw. der Probenverlängerung im Zugversuch die berechnete Weibull-Spannung in Abhängigkeit von m . Die Kurven für 18Ch2MFA bei -140°C sind jeweils bis zum Erreichen der Maximalkraft gezeichnet. Es ist klar erkennbar, dass σ_W mit kleiner werdendem m immer stärker zunimmt. Demzufolge ist der direkte Vergleich von σ_u -Werten nur sinnvoll, wenn m annähernd übereinstimmt. Die üblicherweise angegebenen Konfidenzintervalle sind für die Weibull-Parameter des BEREMIN-Modells nicht sinnvoll, auf ihre Berechnung wird deshalb verzichtet. Die gekerbte Zugprobe weist allerdings auch für übereinstimmendes m eine größere Weibull-Spannung als die SPT-Probe auf. Dies erklärt erstens, warum σ_u in allen Fällen im SPT kleiner ist als im Zugversuch. Zweitens ist das für 18Ch2MFA im Zugversuch ermittelte $\hat{\sigma}_u$ deutlich höher als

¹Hinweis: Aufgrund der großen Unterschiede der Schätzwerte (sowohl die hier berechneten Werte als auch Werte aus der Literatur) ist es völlig ausreichend, m mit zwei signifikanten Stellen anzugeben.

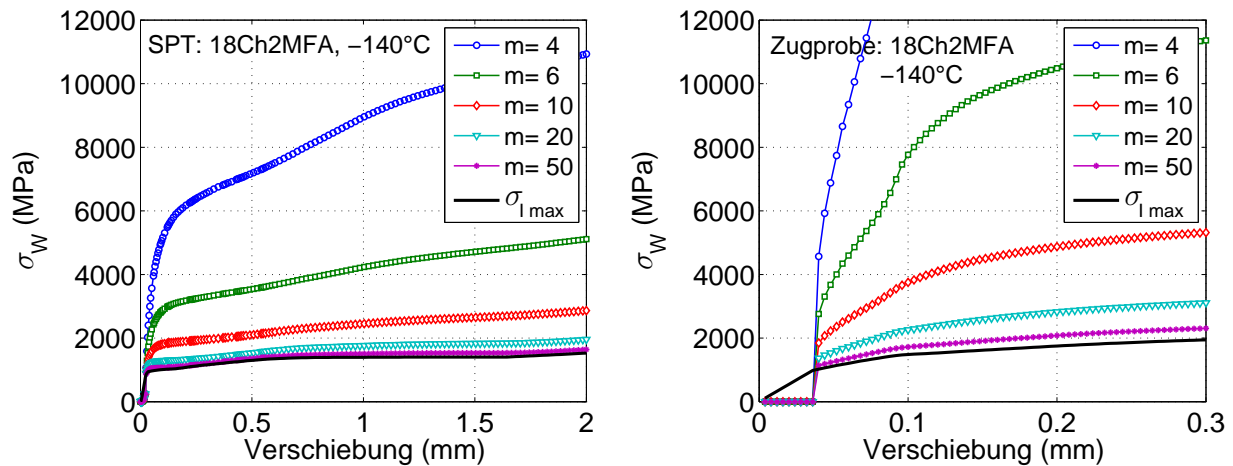


Abbildung 8.12: Einfluss des Weibull-Moduls m auf die simulierte Weibull-Spannung σ_W in einer SPT-Probe (links) und einer gekerbten Zugprobe (rechts) aus 18Ch2MFA bei -140°C , simuliert mit der aus dem STP identifizierten Fließkurve (links) und der Fließkurve aus dem Zugversuch (rechts).

bei allen anderen Ergebnissen, denn in jenem Fall wurde mit $\hat{m} = 13,8$ der mit Abstand kleinste Weibull-Modul erhalten. Für große Werte $m > 20$ wird die Verringerung von σ_W mit zunehmendem m immer kleiner. Zugleich wird auch die Zunahme von σ_W mit steigender Belastung kleiner. Der Grenzwert für $m \rightarrow \infty$ ist identisch mit der größten 1. Hauptspannung $\sigma_{1\max} = \max(\sigma_1(\mathbf{x}))$ in der Probe. Das bedeutet, für ein sehr großes m geht das BEREMIN-Modell in eine klassische Festigkeitshypothese mit der konstanten Festigkeit σ_c über: $\sigma_W(m \rightarrow \infty) = \sigma_{1\max} \leq \sigma_c$. Auch der direkte Vergleich von $\sigma_{1\max}$ in der Probe würde für den SPT eine kleinere Festigkeit als für den Kerbzugversuch ergeben, das belegt Abbildung 8.13. Die Versagenszeitpunkte sind jeweils mit einem Stern-Symbol gekennzeichnet. Offensichtlich streut $\sigma_{1\max}$ in der Small-Punch-Probe nur sehr gering, obwohl die Bruchkraft ähnlich stark streut wie im Zugversuch. Rechts daneben wurde in Abbildung 8.14 noch die Entwicklung des plastifizierten Volumens, das in die Berechnung von σ_W eingeht, aufgetragen. Während im SPT bei etwa der Hälfte der maximalen Verschiebung bereits die gesamte Probe plastifiziert ist, vergrößert sich das plastifizierte Volumen in der gekerbten Zugprobe stetig.

Offensichtlich ermöglicht das originale BEREMIN-Modell keine Übertragung der Sprödbbruchfestigkeit zwischen dem SPT und dem gekerbten Zugversuch. Dieses Problem wurde bereits für andere Probengeometrien berichtet (z.B. [Ber97, Ber99]). Aufgrund der nichtlinearen Abhängigkeit der Weibull-Spannung vom Weibull-Modul sind Vergleiche der Referenzspannung σ_u außerdem nur für konstantes m sinnvoll. Genau diese Annahme, dass m ein Materialparameter und somit für Bauteile des gleichen Werkstoffs konstant ist, wird ja bei Vorhersagen mit dem BEREMIN-Modell getroffen. Die beste Übereinstimmung für σ_u konnte wenig verwunderlich auch für den Fall erzielt werden, bei dem die Schätzwerte für m übereinstimmten (22NiMoCr37, -154°C).

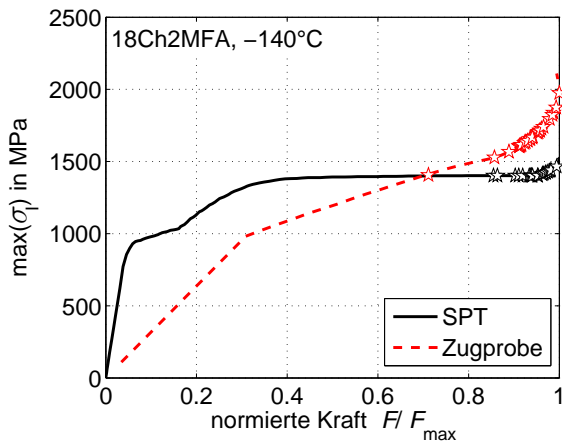


Abbildung 8.13: Entwicklung der größten Hauptnormalspannung in der SPT-Probe und der gekerbten Zugprobe (Simulation für 18Ch2MFA bei -140°C), Stern-Symbol $\hat{=}$ Versagenszeitpunkt.

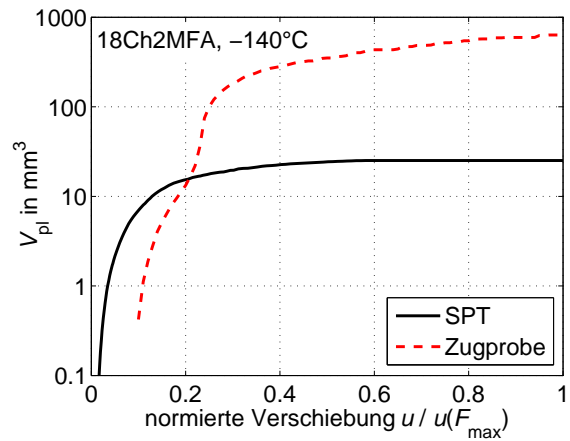


Abbildung 8.14: Entwicklung des plastifizierten Volumens in der SPT-Probe und der gekerbten Zugprobe (Simulation für 18Ch2MFA bei -140°C)

Interessant ist auch, dass σ_W mit beginnender Plastifizierung praktisch einen Sprung von Null auf etwa 1000 MPa macht. Dieser Sprung wird dadurch hervorgerufen, dass die größte Hauptspannung zu diesem Zeitpunkt bereits 1000 MPa beträgt und das plastifizierte Volumen sehr schnell anwächst. Das BEREMIN-Modell würde allerdings auch für Weibull-Spannungen unterhalb 1000 MPa eine Ausfallwahrscheinlichkeit, wenn auch verschwindend gering, vorhersagen. Da das Modell die Spaltbruchwahrscheinlichkeit aus dem GRIFFITH'schen Bruchkriterium und der Mikrorissverteilung in der plastischen Zone herleitet, sollen hier noch ein paar Gedanken über einen unteren Grenzwert in der Weibull-Verteilung folgen. Über das GRIFFITH-Kriterium wird die kritische Risslänge l_0 umgekehrt proportional zum Quadrat der Normalspannung am Riss korreliert: $l_0 \propto 1/\sigma_1^2$. Die Ausdehnung des plastifizierten Volumens begrenzt auch die Länge l_0 möglicher versagensauslösender Mikrorisse. Umso kleiner die plastische Zone zu Beginn der Belastung ist, desto größer ist die erforderliche lokale Spaltbruchspannung. Die Annahme, dass ein unterer Schwellwert der Weibull-Spannung existiert, unterhalb dem kein Versagen auftritt, ist daher nur folgerichtig. Unklar ist allerdings, wie groß dieser ist, ob er geometrieunabhängig ist, wie stark er sich auf die Vorhersage der Ausfallwahrscheinlichkeit auswirkt oder ob er tatsächlich vernachlässigbar ist.

8.5 Weibull-Parameter des Modells mit Schwellwert von GAO

Das dreiparametrische Modell von GAO [Gao98] (Abschnitt 4.6.3, Gl. (4.139)) stellt eine modifizierte Form des BEREMIN-Modells mit einem unteren Schwellwert der Weibull-Spannung σ_{Wmin} dar. In diesem Abschnitt werden für dieses Modell die Weibull-Parameter aus dem SPT bestimmt. Allerdings erfolgt die Parameterschätzung nur für eine Auswahl von zwei der zuvor gezeigten sechs Beispiele. Damit die bisher verwendete Auswerteprozedur auch für die dreiparametrische Weibull-Verteilung verwendet werden kann, muss σ_{Wmin} vorgegeben und folgende Transformation in eine zweiparametrische Verteilung durchgeführt werden:

$$P_f(\sigma_W^*) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{\sigma_W^*}{\sigma_u^*} \right)^m \right] \quad (8.4a)$$

$$\text{mit } \sigma_W^* = \sigma_W - \sigma_{Wmin} \quad \text{und} \quad \sigma_u^* = \sigma_u - \sigma_{Wmin} . \quad (8.4b)$$

σ_W wird in gleicher Weise wie bisher berechnet. Vor der Parameterschätzung muss lediglich das gegebene σ_{Wmin} abgezogen werden, um die Zufallsvariable σ_W^* zu erhalten. Nach der Parameterschätzung muss σ_{Wmin} zum Schätzwert $\hat{\sigma}_u^*$ addiert werden um $\hat{\sigma}_u$ zu erhalten.

Die naheliegendste Schätzung eines unteren Schwellwertes liefert die zuvor durchgeführte Parameterstudie bezüglich m . Dabei wurde festgestellt, dass σ_W mit beginnender Plastifizierung sprunghaft auf etwa 1000 MPa ansteigt, bei kleinerer Last ist die Weibull-Spannung und damit auch die Ausfallwahrscheinlichkeit Null. Das entsprechende Ergebnis der Parameterschätzung für 22NiMoCr37 bei -154°C zeigt Abbildung 8.15. Der Weibull-Modul liegt jetzt bei etwa 20, was dem von der Autorengruppe BEREMIN [Ber83] empfohlenen Wert entspricht. Für 18Ch2MFA bei -140°C muss der Schwellwert sogar noch etwas höher angesetzt werden, um etwa diesen Weibull-Modul-Schätzwert zu erreichen, siehe Abbildung 8.16. Die Anpassung an eine Weibull-Gerade hat sich in beiden Fällen nicht verschlechtert, im Gegenteil, sie ist augenscheinlich sogar besser geworden. Durch die Einführung der Untergrenze σ_{Wmin} sinkt der Schätzwert des Weibull-Moduls einer Stichprobe und die Weibull-Referenzspannung steigt an. Der Effekt verstärkt sich, umso größer man σ_{Wmin} wählt. Erfolgt die Steigerung schrittweise, so kann man sich zum Beispiel an den Schätzwert $\hat{m} = 4$ herantasten (also eine Optimierung von σ_{Wmin} für ein vorgegebenes m). Dann würde m aus der Weibull-Spannungsverteilung im SPT mit dem Weibull-Modul m_K der Bruchzähigkeitsverteilung nach WALLIN (4.137) übereinstimmen. Das Ergebnis der Parameterschätzung zeigen die Abbildungen 8.17 und 8.18. Erstaunlicherweise liegen die Datenpunkte für 18Ch2MFA, die zuvor einem stark gekrümmten Verlauf folgten, jetzt fast perfekt auf einer Geraden.

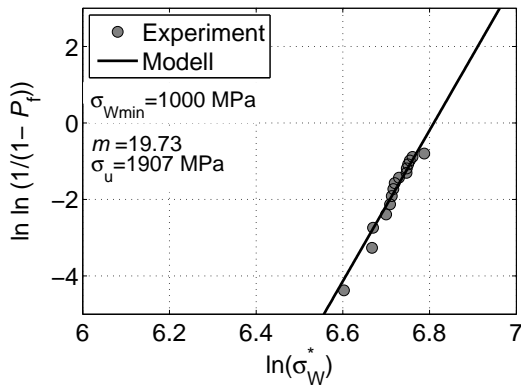


Abbildung 8.15: Weibull-Diagramm für 22NiMoCr37 bei -154 °C mit $\sigma_{Wmin} = 1000\text{ MPa}$, MRR-Parameterschätzwerte \hat{m} und $\hat{\sigma}_u$ bei rechts zensierten Daten ($N = 40, N_1 = 15$)

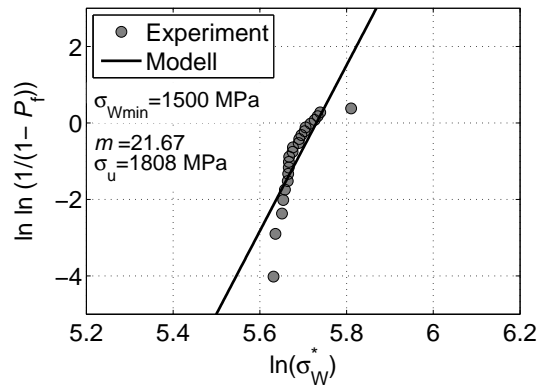


Abbildung 8.16: Weibull-Diagramm für 18Ch2MFA bei -140 °C mit $\sigma_{Wmin} = 1500\text{ MPa}$, MRR-Parameterschätzwerte \hat{m} und $\hat{\sigma}_u$ bei rechts zensierten Daten ($N = 28, N_1 = 22$)

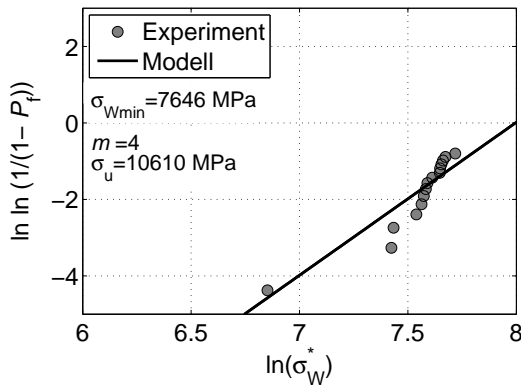


Abbildung 8.17: Weibull-Diagramm für 22NiMoCr37 bei -154 °C mit $m = 4$, MRR-Parameterschätzwerte $\hat{\sigma}_{Wmin}$ und $\hat{\sigma}_u$ bei rechts zensierten Daten ($N = 40, N_1 = 15$)

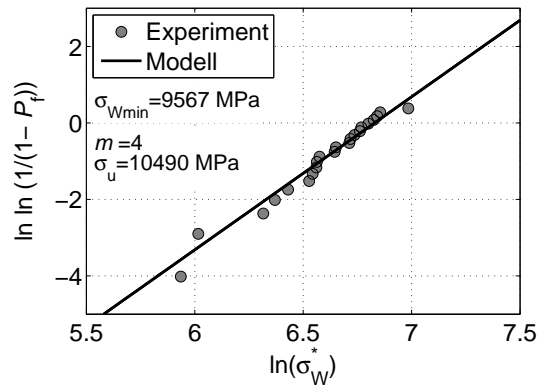


Abbildung 8.18: Weibull-Diagramm für 18Ch2MFA bei -140 °C mit $m = 4$, MRR-Parameterschätzwerte $\hat{\sigma}_{Wmin}$ und $\hat{\sigma}_u$ bei rechts zensierten Daten ($N = 28, N_1 = 22$)

8.6 Vorhersage der Spröbruchzähigkeit von Stahl

8.6.1 Diskussion zur Übertragbarkeit der Weibull-Parameter

Die Idee des BEREMIN-Modells und des Modells von GAO besteht darin, dass unterschiedliche Probengeometrien, für die unter Belastung die gleiche Weibull-Spannung berechnet wird, auch die gleiche Ausfallwahrscheinlichkeit besitzen. Zwar gibt es, wie aus der Literatur bekannt ist und auch in dieser Arbeit aufgezeigt wurde, modellinhärente Schwierigkeiten bei der Übertragung der Weibull-Parameter zwischen verschiedenen Probengeometrien aufgrund der Tatsache, dass $\sigma_W(L)$ für verschiedene m ebenfalls unterschiedlich ist. Die Probleme können teilweise vermieden werden, wenn die Übertragung für ein konstantes m erfolgt. Genaugenommen muss der Weibull-Modul bei Proben vom gleichen Entnahmeort sogar als konstant angenommen werden, da er sonst keine Werkstoffkonstante wäre. Zwei

grundlegende Schwierigkeiten bestehen bei der Identifikation des Weibull-Moduls:

- Die statistische Streuung der Sprödbbruchfestigkeit führt bei mehreren Stichproben zu variierenden Schätzwerten \hat{m} .
- Für eine Stichprobe führt die Berücksichtigung eines unteren Schwellwertes σ_{Wmin} zu einer Abnahme des Schätzwertes \hat{m} , wenn σ_{Wmin} vergrößert wird.

Aus üblichen Stichprobengrößen $N \leq 30$ kann weder der wahre Weibull-Modul noch die Festigkeitsuntergrenze σ_{Wmin} mit zufriedenstellender Genauigkeit bestimmt werden, egal welche Probenform verwendet wird. Dafür wären deutlich größere Stichprobenumfänge notwendig, was jedoch aus Kostengründen oder aufgrund begrenzter Materialverfügbarkeit praktisch nicht realisiert wird.

Der Weibull-Modul beschreibt gleichzeitig die Streuung der Festigkeit und ihre Abhängigkeit vom beanspruchten Volumen. Der Schätzwert \hat{m} , welcher am besten die Festigkeitsstreuung in einem Experiment charakterisiert, beschreibt allerdings nicht notwendigerweise die Volumenabhängigkeit der Festigkeit am besten. Für diesen Zweck ist es sinnvoller, zwei unterschiedliche Experimente durchzuführen, die sich deutlich in ihrer mittleren Festigkeit unterscheiden. Hier kann der SPT ein sehr geeignetes zweites Experiment sein. Wenn Standardversuche mit großen Proben durchgeführt werden, bleibt normalerweise genug Restmaterial übrig, um daraus Small-Punch-Proben zu entnehmen. Gilt die Weakest-Link-Hypothese, so geht eine größere Festigkeit (lokale Versagensspannung) mit einer kleineren plastifizierten Zone einher und umgekehrt, die Weibull-Spannung σ_W sollte jedoch bei gleicher Ausfallwahrscheinlichkeit konstant sein! Die vom Autor aus Literaturstudien (siehe auch Abschnitt 4.6.3) und eigenen numerischen Studien gesammelten Erfahrungen ermutigen zu der Aussage, dass die Übertragung zwischen verschiedenen Probenformen nur für Werte $m \leq 20$ sinnvoll ist und in vielen Fällen auch dann mit dem originalen BEREMIN-Modell ohne Festigkeitsuntergrenze noch nicht gelingt, insbesondere, wenn die Probenform und der Spannungszustand in der plastischen Zone sehr unterschiedlich sind.

In diesem Sinne geht die nun folgende Betrachtung der Fragestellung nach, welcher Weibull-Modul und damit auch welche Untergrenze σ_{Wmin} die beste Übereinstimmung zwischen SPT und Bruchmechanikversuch ermöglicht. Dazu muss die Bruchmechanikprobe mit der FEM simuliert und der von m abhängige funktionale Zusammenhang zwischen σ_W und dem Spannungsintensitätsfaktor K_I ermittelt werden. Die aus dem SPT bestimmten Parameterschätzwerte \hat{m} , $\hat{\sigma}_u$ und $\hat{\sigma}_{Wmin}$ ermöglichen dann die Vorhersage der Ausfallwahrscheinlichkeit der Bruchmechanikprobe in Abhängigkeit von K_I . Entsprechende bruchmechanische Kennwerte für die Validierung sind allerdings nur für 22NiMoCr37 bei -154°C aus Versuchen an CT-Proben verfügbar [Hee02].

8.6.2 FE-Simulation der CT-Probe

Wie bei der Simulation des SPT wurde die FEM-Software ABAQUS verwendet. Es wurde der ebene Verzerrungszustand angenommen und der Elementtyp CPE8R (quadratische 8-Knoten-Elemente mit reduzierter Integration) verwendet. Aus Symmetriegründen wurde nur die halbe Probe modelliert. Abbildung 8.19 links zeigt das vernetzte Modell einer CT-1T-Probe, welche die Dicke $B_0 = 25$ mm besitzt. Für größere oder kleinere Proben schreibt der ASTM-Standard [AST02b] eine Dickenkorrektur (Gl. (4.138)) vor, die auf der Untersuchung von WALLIN [Wal85] zum Größenefekt bei K_{Ic} -Ergebnissen basiert und nichts anderes als eine Umrechnung der gemessenen Bruchzähigkeit auf die Referenzprobengröße CT-1T mit dem Weibull-Modul $m_K = 4$ darstellt. Obwohl aus [Hee02] die Sprödbbruchzähigkeit für CT-Proben verschiedener Größe vorliegt, erfolgt daher die Berechnung nur für die CT-1T-Probe. Die modellierte Risslänge beträgt $a = 29$ mm (23,5 mm von der Belastungslinie bis zum Kerbgrund + 5,5 mm Anriss) und repräsentiert die größte gemessene Risslänge. An der Rissspitze kommen kollabierte quadratische Elemente zum Einsatz, die eine radiale $1/r$ -Singularität modellieren (siehe Abschnitt 4.5.5). Die Elementkantenlänge dieser Elemente in radialer Richtung beträgt $50\text{ }\mu\text{m}$, genauso wie die Elementkantenlänge im FE-Modell des SPT, und wird mit zunehmendem Abstand von der Rissspitze größer. Die Berechnung des Spannungsintensitätsfaktors erfolgt mit Hilfe der Beziehung (4.114) aus dem numerisch bestimmten J -Integral (von ABAQUS für die 10. Kontur ausgegeben), daher wird auch die Bezeichnung K_J verwendet. Die isotrop elastisch-plastischen Materialeigenschaften werden mit der Fließkurve und dem Elastizitätsmodul, die aus dem SPT identifiziert wurden, modelliert. Die Querkontraktionszahl ist $\nu = 0,3$.

In den folgenden Bildern wird der simulierte Beanspruchungszustand an der Rissspitze bei einem Spannungsintensitätsfaktor $K_J = 80\text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ dargestellt. Abbildung 8.19 rechts zeigt die rot eingefärbten plastifizierten Elemente an der Rissspitze. Die plastische Vergleichsdehnung ist in Abbildung 8.20 rechts dargestellt. Die Skalierung wurde so gewählt, dass die sonst üblicherweise angegebene 0,2%-Dehngrenze $R_{p0,2}$ die äußerste Kontur (Linie zwischen dunkelblau und hellblau) darstellt. Dabei fällt auf, dass die Zone mit $\varepsilon_V^{\text{pl}} \geq 0,002$ deutlich erkennbar kleiner ist als der Bereich der plastifizierten Elemente. Der Unterschied ist auf der Symmetrielinie am größten, dort wo auch die 1. Hauptspannung am größten ist, welche in Abbildung 8.20 links zu sehen ist.

8.6.3 Vorhersage von K_{Jc} für 22NiMoCr37

Die Übertragung der in den Abschnitten 8.4.1 und 8.5 für 22NiMoCr37 bei -154°C aus dem SPT bestimmten Weibull-Parameter auf die simulierte CT-Probe basiert auf der Annahme, dass die gleiche Weibull-Spannung in unterschiedlichen Bauteilen auch die gleiche

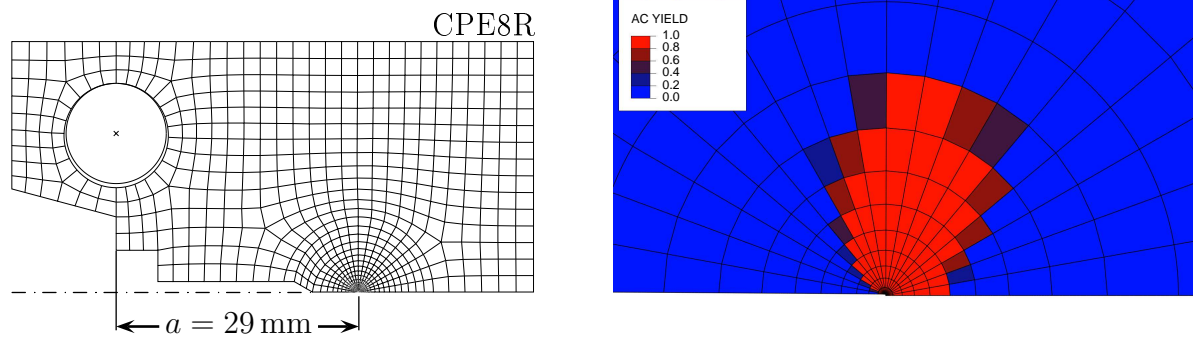


Abbildung 8.19: FE-Netz der halben CT-1T-Probe (links) und plastisch verformte Zone an der Rissspitze (rechts).

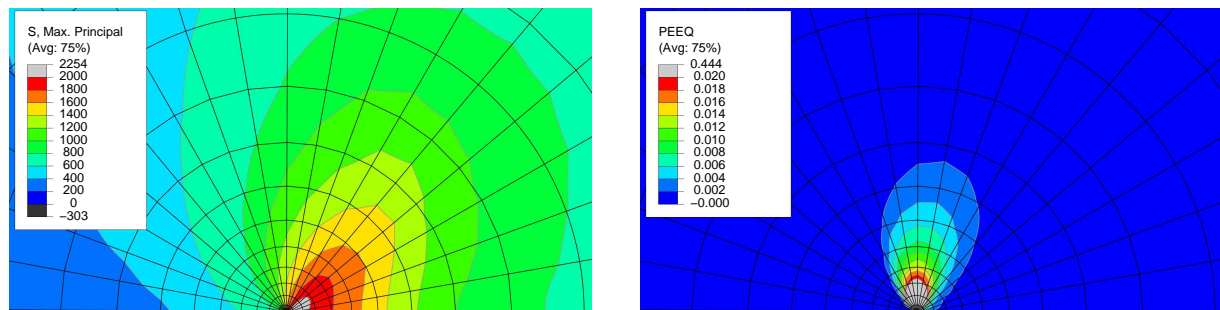


Abbildung 8.20: 1. Hauptspannung (links) und plastische Vergleichsdehnung (rechts) an der Rissspitze der CT-Probe.

Versagenswahrscheinlichkeit für Sprödbbruch hervorruft. Die Übertragung ist allerdings nur für ein konstantes m sinnvoll. Zur Veranschaulichung soll der direkte Vergleich der Weibull-Spannung in der SPT-Probe und der CT-Probe für variiertes m in Abbildung 8.21 dienen. Die Skalierung der vertikalen Achse wurde auf beiden Seiten identisch gewählt. Für eine gegebene Versagenslast und gegebenes m im SPT kann ein Punkt auf der σ_W - F -Kurve markiert, dann eine waagerechte Linie in das rechte Diagramm bis zum Schnittpunkt mit der korrespondierenden σ_W - K_J -Kurve gezeichnet und schließlich der K_J -Wert mit der gleichen Ausfallwahrscheinlichkeit abgelesen werden.

Die Vorhersage der Bruchzähigkeitsverteilung $P_f(K_{Jc})$ erfolgt allerdings nicht Punkt für Punkt graphisch, sondern über die Verteilungsfunktion (8.4a), die für den Sonderfall $\sigma_{Wmin} = 0$ das BEREMIN-Modell beinhaltet. Für jeweils einen vorgegebenen Parameter σ_{Wmin} oder m wurden unterschiedliche Parametertripel $(\hat{\sigma}_{Wmin}, \hat{m}, \hat{\sigma}_u)$ bestimmt, sodass unterschiedliche Vorhersagen gemacht werden konnten. Die zu beantwortende Frage ist, welches Parametertripel die beste Vorhersage der gemessenen Bruchzähigkeitsverteilung liefert. Für jedes m muss lediglich noch der Zusammenhang $K_J(\sigma_W)$ berechnet werden. In der CT-Probe ist dieser Funktionsverlauf nur schwach nichtlinear und lässt sich mit

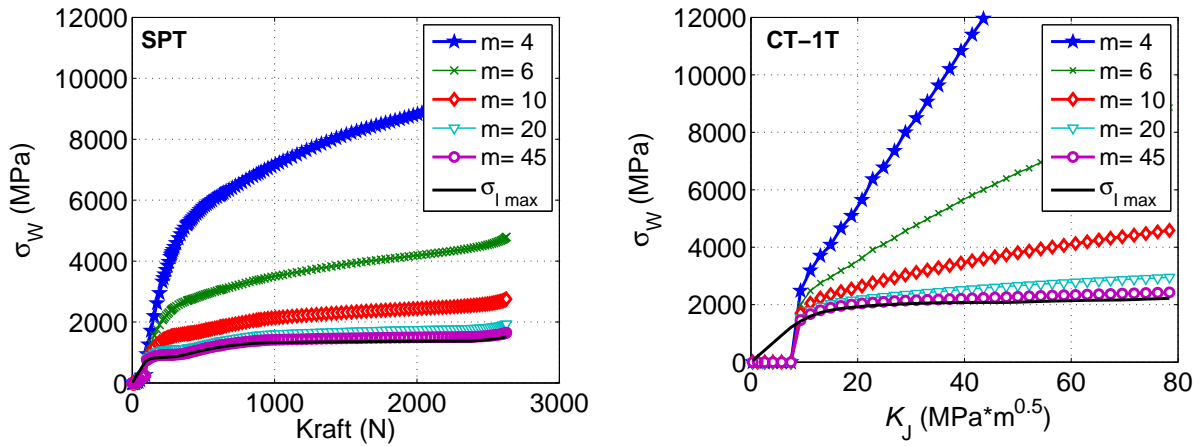


Abbildung 8.21: Einfluss des Weibull-Moduls m auf die Weibull-Spannung σ_W in einer SPT-Probe (links) und einer CT-Probe (rechts). Simulation mit der aus dem SPT identifizierten Fließkurve.

einfachen Polynomen bis zum Grad 4 der Form

$$\frac{\tilde{K}_J(\sigma_W)}{\text{MPa}\sqrt{m}} = a_0 + a_1 \frac{\sigma_W}{\text{MPa}} + a_2 \left(\frac{\sigma_W}{\text{MPa}} \right)^2 + a_3 \left(\frac{\sigma_W}{\text{MPa}} \right)^3 + a_4 \left(\frac{\sigma_W}{\text{MPa}} \right)^4 \quad (8.5)$$

sehr genau approximieren. Die von m abhängigen Polynomkoeffizienten a_0 , a_1 , a_2 , a_3 und a_4 wurden für die in Abb. 8.21 rechts dargestellten Funktionsverläufe mit der Methode der kleinsten Quadrate für den Wertebereich $9 \text{ MPa}\sqrt{m} < K_J < 60 \text{ MPa}\sqrt{m}$ berechnet und sind in Tabelle 8.3 aufgeführt.

Tabelle 8.3: Vom Weibull-Modul abhängige Polynomkoeffizienten der Approximation $\tilde{K}_J(\sigma_W)$ (Gl. (8.5))

m	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
4	-0,23247	0,0036730			
6	-3,1300	0,0046811	$5,152 \cdot 10^{-7}$		
10	30,844	-0,032909	$1,3148 \cdot 10^{-5}$	$-8,3192 \cdot 10^{-10}$	
20	-345,96	0,74277	$-5,6729 \cdot 10^{-4}$	$1,8428 \cdot 10^{-7}$	$-2,0652 \cdot 10^{-11}$
45	-706,21	1,2870	$-7,7164 \cdot 10^{-4}$	$1,5466 \cdot 10^{-7}$	

Zunächst stellt Abbildung 8.22 die vorhergesagte Versagenswahrscheinlichkeit von 22NiMoCr37 über σ_W für fünf aus dem SPT bei -154°C identifizierte Parametersätze $(\sigma_{W\min}, m, \sigma_u)$ dar. Die fünf P_f - σ_W -Kurven sind die Modellvorhersagen unter den fünf Annahmen $\sigma_{W\min} = 0$, $\sigma_{W\min} = 1000 \text{ MPa}$, $m = 10$, $m = 6$ und $m = 4$. D.h. von drei Parametern des Modells wurde jeweils einer vorgegeben, die anderen beiden gefittet. Die dann mit Gl. (8.5) vorhergesagte Bruchzähigkeitsverteilung für die CT-Probe zeigt Abbildung 8.23. In das Diagramm wurde auch die gemessene Bruchzähigkeitsverteilung [Hee02] und der Weibull-Fit nach WALLIN (4.137), der in der Master-Curve [AST02b] verwendet wird, eingezeichnet. Die Vorhersage verbessert sich, wenn $\sigma_{W\min}$ zunimmt bzw. m ab-

nimmt. Werte $m < 4$ bringen dagegen keine bessere Übereinstimmung, weil dann $K_{J\min}$ überschätzt wird. Für $m = 4$ beträgt die vorhergesagte Mindestbruchzähigkeit bereits $K_{J\min} = 28 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$, in der ASTM-Norm wird $K_{\min} = 20 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ verwendet. Die aus dem SPT bestimmten Parametersätze und Perzentile der vorhergesagten Bruchzähigkeitsverteilung fasst Tabelle 8.4 zusammen.

Tabelle 8.4: Aus dem SPT bestimmte Weibull-Parameter (graue Felder markieren vorgegebenen Parameter) und vorhergesagte Perzentile der Bruchzähigkeitsverteilung für 22NiMoCr37 bei -154°C .

m	$\sigma_{W\min}$ MPa	σ_u MPa	$K_{J\min}$ $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$	$K_{J,5\%}$ $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$	$K_{J,50\%}$ $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$	$K_{J,95\%}$ $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$
4	7646	10610	27,9	33,0	37,8	42,2
6	3350	4927	18,3	26,6	31,5	35,6
10	1755	2760	9,1	17,8	21,9	25,2
20	1000	1907	≈ 8	10,7	12,1	13,3
45	0	1615	$\approx 7,5$	10,2	11,1	11,3

Eine abschließende Bewertung, ob sich anhand der SPT-Ergebnisse zuverlässig die Sprödbbruchzähigkeit vorhersagen lässt, muss auf einer größeren Stichprobenzahl und mehreren untersuchten Werkstoffen beruhen. Der Grund ist die statistische Natur des Sprödbbruchs und die damit verbundene Unsicherheit bei der Wahl von m und $\sigma_{W\min}$, denn die Anpassung der Weibull-Verteilung an eine experimentelle Festigkeitsverteilung ist für verschiedene Parameterkombinationen $(m, \sigma_{W\min})$ möglich. Den größten m -Wert erhält man für $\sigma_{W\min} = 0$. Die konservativste Aussage wird für ein möglichst hohes m bzw. $\sigma_{W\min} = 0$ erhalten, dann ist die vorhergesagte Bruchzähigkeit am kleinsten, jedoch wird auch für $\sigma_{W\min} = 0$ ein unterer Schwellwert der Bruchzähigkeitsverteilung $K_{J\min} > 0$ vorhergesagt (siehe Abb. 8.21 rechts). Will man also auf der sicheren Seite sein, so kann man das BEREMIN-Modell verwenden, obwohl die damit vorhergesagte Bruchzähigkeitsverteilung die experimentell beobachteten Bruchzähigkeitswerte deutlich unterschätzt, der vorhergesagte Mittelwert liegt bei nur einem Viertel des gemessenen Wertes, die vorhergesagte Mindestbruchzähigkeit bei etwa einem Drittel des Wertes in der ASTM-Norm. Die genaueste Vorhersage, aber gleichzeitig die Gefahr, die Bruchzähigkeit für kleine Ausfallwahrscheinlichkeiten zu überschätzen, liefert die Annahme $m = 4$.

Die hier vorgestellte Methode liefert für den Werkstoff 22NiMoCr37 bei -154°C vielversprechende Ergebnisse. Die Sprödbbruchzähigkeit bei tiefen Temperaturen lässt sich allein aus den SPT-Versuchsergebnissen mit Hilfe numerischer Simulation abschätzen. Wertet man die Bruchbeanspruchungen dementsprechend auch für andere Temperaturen aus, so lassen sich in der Tieflage der Zähigkeit und im unteren Teil des spröduktilen Übergangs zwei Grenzkurven berechnen:

- Eine untere Grenzkurve und zugleich konservativste Abschätzung der Bruchzähigkeitsverteilung mit dem zweiparametrischen BEREMIN-Modell. Im Berechnungsbeispiel liegt die vorhergesagte Bruchzähigkeit bei einem Drittel bis einem fünftel der Messwerte.
- Eine obere Grenzkurve mit dem dreiparametrischen Modell von GAO unter der Annahme $m = 4$. Im Berechnungsbeispiel wird die Mindestbruchzähigkeit geringfügig überschätzt.

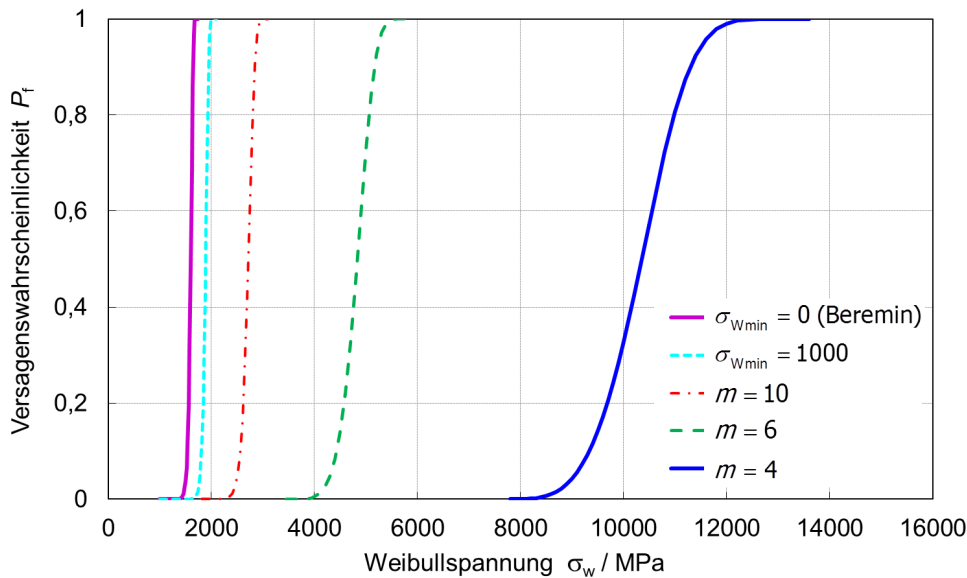


Abbildung 8.22: Aus den SPT-Ergebnissen vorhergesagte Versagenswahrscheinlichkeit als Funktion der Weibull-Spannung für 22NiMoCr37 bei -154 °C . Ein Parameter wird vorgegeben, die anderen beiden geschätzt. Der vorgegebene Parameter ist in der Legende angegeben.

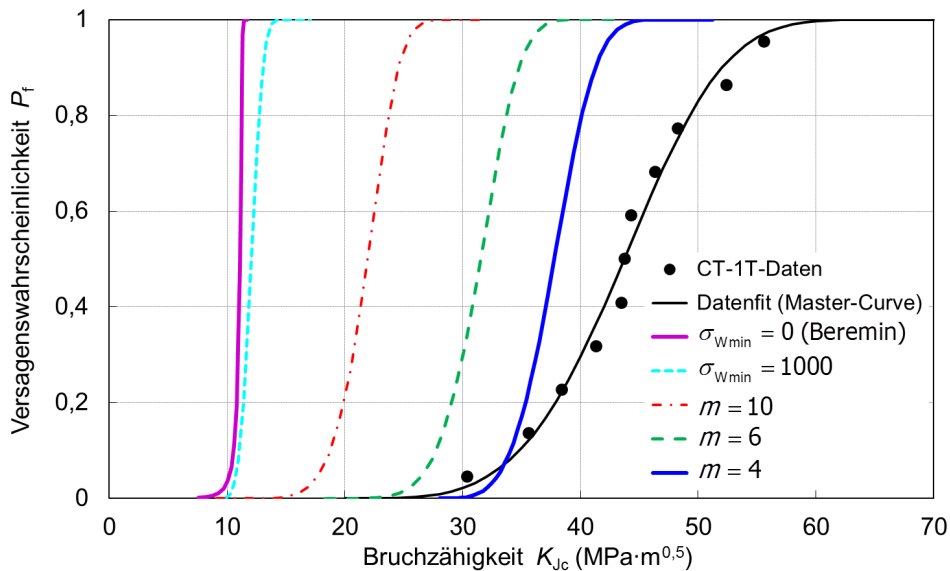


Abbildung 8.23: Aus den SPT-Ergebnissen vorhergesagte Bruchzähigkeitsverteilungen (der vorgegebene Parameter ist in der Legende angegeben) und experimentelle Ergebnisse an CT-Proben für 22NiMoCr37 bei -154 °C [Hee02] mit Datenfit nach (4.137).

9 Bruchzähigkeitsbestimmung an Keramikproben mit Indenterriß

9.1 Bruchzähigkeitsbestimmung mit Härteeindrücken

Die Bruchzähigkeit von keramischen Werkstoffen kann nicht nur mit klassischen Bruchmechanikproben bestimmt werden. Mehrere alternative Methoden verwenden Oberflächenrisse, die mit Hilfe von Härteeindrücken erzeugt werden [Mun99]. Einen relativ aktuellen Überblick über verschiedene Methoden geben DANZER und LUBE [Dan04]. Beim Belasten der Probenoberfläche mit der Diamantpyramide eines Vickers- oder Knoop-Indenters entstehen lokal begrenzt sehr hohe Spannungen. Unterhalb des Indenters kommt es auch bei Keramik zu mikroplastischen Verformungen, die als Härteeindruck sichtbar sind. Beim Entlasten entstehen hohe Zugeigenspannungen, welche zur Rissbildung führen können. An der Oberfläche verlaufen die scharfen Risse ausgehend von den Ecken des Härteeindrucks radial nach außen. Die Ausdehnung in die Tiefe kann erst an der gebrochenen Probe fraktographisch ermittelt werden. In guter Näherung können die entstandenen Risse als halbelliptische Oberflächenrisse betrachtet werden, deren Größe für die Bestimmung der Bruchzähigkeit herangezogen werden kann.

Die Entstehung der Vickers-Risse und ihre Nutzung für die Bestimmung der Bruchzähigkeit wurde von mehreren Autoren theoretisch und experimentell untersucht. Das Ergebnis der aufwendigen Berechnungen wurde schließlich in empirische Auswerteformeln gefasst, welche die Eindruckkraft, die Größe des Härteeindrucks und die entstandene Risslänge nach dem Indenterversuch auswerten. Dies nennt man auch direkte Methode oder IF-Methode [Ans81]. Allerdings ist diese Methode nicht sehr genau und nicht allgemeingültig. Sie eignet sich nur zum qualitativen Vergleich der Zähigkeit ähnlicher Werkstoffe [Dan04]. Bei der indirekten ISB-Methode („indentation strength in bending“) wird der Vickers-Riss in eine einachsige Biegeprobe eingebracht und diese anschließend gebrochen [Cha81]. Diese etablierte Methode soll für den SPT adaptiert werden. Problematisch ist dabei das komplizierte Eigenspannungsfeld infolge der plastisch verformten Oberflächenschicht. Die nicht genau bekannten Eigenspannungen überlagern sich mit den Biegespannungen und verfälschen somit die zu bestimmende Bruchzähigkeit. Bei der SCF-Methode („surface crack

in flexure“) [Qui02], wird der Riss mit Hilfe eines Knoop-Indenters eingebracht und die plastisch verformte Oberflächenschicht abpoliert, Eigenspannungen werden somit entfernt. Sowohl bei der ISB-Methode als auch der experimentell aufwendigeren SCF-Methode muss für die korrekte Berechnung des Spannungsintensitätsfaktors die tatsächliche Größe und Form des Risses auf der Bruchfläche nachgewiesen werden.

9.2 Vorgehensweise

Das Ziel ist es, den SPT dahingehend zu modifizieren, dass er für die direkte Bestimmung der Modus-I-Bruchzähigkeit K_{Ic} von Keramikwerkstoffen verwendet werden kann. Für diesen Zweck muss die SPT-Probe auf ihrer Zugseite mit einem scharfen Anriss versehen und dieser vermessen werden. Mit Hilfe eines Vickers-Indenters werden in Probenmitte zwei sich kreuzende Oberflächenrisse erzeugt (Abbildung 9.1), deren Form als halbelliptisch angenommen wird (Abbildung 9.2). Anschließend wird die Probe im SPT bis zum Versagen belastet. Indenterrisse haben gegenüber Sägeschnitten den Vorteil, dass nicht nur eine Kerbe mit kleinem Kerbradius, sondern tatsächlich ein scharfer Anriss erzeugt wird. Insbesondere bei kleinen dünnen Proben würden Kerbradien dazu führen, dass die Bruchzähigkeit überschätzt wird [Mun99]. Als Beispielwerkstoff kommt die selbe Aluminiumoxidkeramik Rubalit 708S zur Anwendung, für die bereits die Weibull-Parameter bestimmt wurden. Eine dreidimensionale FEM-Spannungsanalyse der SPT-Probe mit Riss dient der Berechnung des Spannungsintensitätsfaktors entlang der Rissfront. Referenzwerte der Bruchzähigkeit werden an Biegeproben mit der SEVNB-Methode bestimmt. Für den Fall der zweiachsigen Biegung im SPT sind keine Handbuchlösungen bekannt, welche die Auswertung vereinfachen würden. Allerdings bietet sich zum Vergleich die Näherungslösung von NEWMAN und RAJU[New81] für halbelliptische Oberflächenrisse unter einachsiger Biegung an.

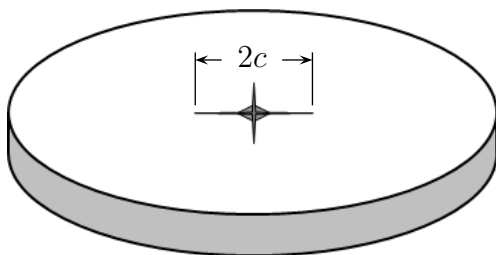


Abbildung 9.1: Erzeugung von scharfen Oberflächenrisse auf der Zugseite der SPT-Probe mit Hilfe eines Vickers-Eindrucks (nicht maßstabsgetreu)

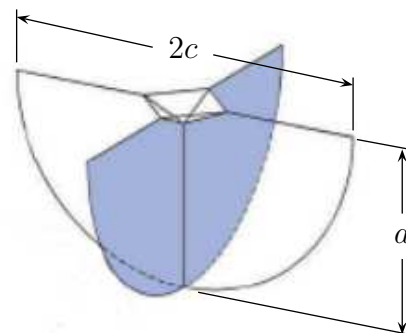


Abbildung 9.2: Angenommene Form der Vickers-Risse: zwei sich kreuzende halbelliptische Oberflächenrisse mit Risstiefe a und Risslänge $2c$

Die Ursache der Rissentstehung sind Zugspannungen infolge mikroplastischer Deformationen. Nach dem Eindruck verbleibt ein Eigenspannungsfeld, Druckspannungen in der plastisch geschädigten Eindruckzone stehen im Gleichgewicht mit den Zugspannungen im Bereich der Rissspitze des geöffneten Risses [Mun99]. Die Zugeigenspannungen verursachen einen positiven Spannungsintensitätsfaktor K_{res} an der Rissfront, welcher dem bei Biegebelastung von außen aufgetragenen Spannungsintensitätsfaktor K_{appl} überlagert ist [Fet95]:

$$K_I = K_{I,\text{appl}} + K_{I,\text{res}} \quad (9.1)$$

Das Eigenspannungsfeld in der Umgebung des Eindrucks ist allerdings nur qualitativ bekannt. Die Vernachlässigung führt nach Gl. (9.1) jedoch zu konservativen Abschätzungen der Bruchzähigkeit. Um korrekte K_{Ic} -Werte zu erhalten, müssten die Eigenspannungen entfernt werden. Dies kann durch Abschleifen einer Oberflächenschicht von der Tiefe der plastisch deformierten Zone geschehen.

9.3 Erzeugung und Vermessung der Vickers-Risse

Die Vickers-Eindrücke wurden mit einer gewöhnlichen Härteprüfeinrichtung in die SPT-Proben eingebracht. Der Riss soll zum einen wesentlich größer sein als der Härteeindruck und zum anderen klein genug, damit er nicht von der gegenüberliegenden Oberfläche beeinflusst wird. Einen guten Kompromiss lieferte die Prüfbedingung HV 5 mit der Indenterkraft $P = 49,05 \text{ N}$. Damit wurden radiale Risse im Längenbereich $c = 110 \dots 150 \mu\text{m}$ gemessen.

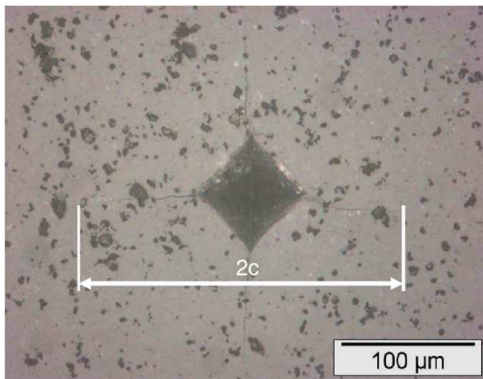
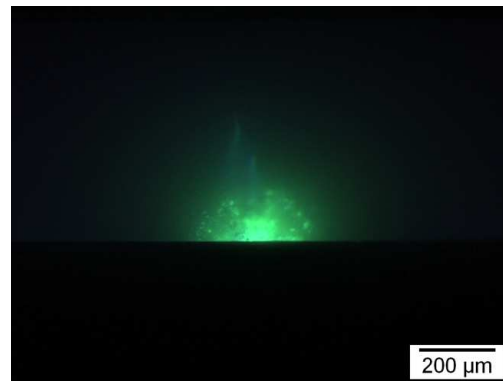
Vor dem Indentieren muss die Probenoberfläche poliert werden, damit die Risse überhaupt mit dem Lichtmikroskop sichtbar gemacht werden können (Abbildung 9.3). Zum Zwecke des Polierens wurden die Probenscheiben mit Heißwachs auf einen ebenen Probenteller aufgeklebt. Das Schleifen und Polieren der Al_2O_3 -Keramik erfolgte mit Diamantsuspension mit feiner werdender Körnung (Materialabtrag mit $9 \mu\text{m}$, Grobpolieren mit $6 \mu\text{m}$ und Feinpolieren mit $3 \mu\text{m}$). Die Messung der Probendicke bzw. des Abtrages beim Schleifen und Polieren geschah mittels eines Messtasters ($1 \mu\text{m}$ Auflösung) relativ zum Probenhalter. In Tabelle 9.1 sind die gemessenen Risslängen der einzelnen Proben zusammengestellt, die später im SPT belastet wurden.

Die Rissform in der Tiefe kann erst nach dem Brechen der Probe fraktographisch bestimmt werden. Allerdings war es nicht möglich die Risskontur infolge des Indentereindrucks von der Restbruchfläche zu unterscheiden. Um den Indenterriss dennoch sichtbar zu machen bestand die einzig praktikable Methode darin, die Probenoberfläche unmittelbar nach dem Härteeindruck mit Fluoreszenzeindringfarbe zu betropfen. Die Farbe dringt

Tabelle 9.1: Mit dem Lichtmikroskop gemessene Längen der Vickers-Risse und Bruchkraft im SPT

Probennummer	Dicke h (mm)	$2c$ horizontal (μm)	$2c$ vertikal (μm)	Bruchkraft F_{max} (N)
146	0,588	216	285	52,9
194	0,592	280	260	48,2
195	0,578	270	264	49,4
313	0,595	283	292	50,2
317	0,599	293	262	48,5
320	0,595	300	266	47,7
547	0,596	276	273	47,8
577	0,582	240	269	43,8
777	0,595	269	289	45,6
977	0,576	280	286	38,3

in Risse und Poren bzw. Ausbrüche ein, sie benetzt die Rissflächen vollständig. Unter Einwirkung von UV-Licht kann dann die Indenterrissfläche auf der Bruchfläche wie in Abbildung 9.4 sichtbar gemacht werden. Dafür wurde ein Mikroskop mit UV-Lichtquelle und entsprechendem Filter verwendet. Die Fluoreszenzmethode wurde bei einigen der mit Vickers-Rissen präparierten Proben angewandt. Die Risse besitzen wie in Abbildung 9.4 ersichtlich ist, tatsächlich die angenommene halb elliptische Form, die in erster Näherung sogar als kreisförmig angesehen werden kann.

**Abbildung 9.3:** Vickers-Eindruck (HV5) in der polierten Oberfläche einer SPT-Probe unter dem Lichtmikroskop zur Vermessung der Risslänge $2c$ **Abbildung 9.4:** Mit Hilfe von Fluoreszenzeindringfarbe und UV-Licht im Lichtmikroskop auf der Bruchfläche sichtbar gemachte Rissform bestätigt Annahme eines halb kreisförmigen Risses

Damit der Riss während der Biegebeanspruchung im SPT eine reine Modus-I-Belastung erfährt, muss er sich genau in der Mitte der Probe direkt unterhalb der Stempelspitze befinden. Die Positionierung des Härteeindrucks erfolgt mit dem x - y -Tisch und dem Mikroskop des Härteprüfgeräts. Durch Anfahren der Ränder der kreisrunden Probe, kann die Mitte bestimmt werden, in die ein virtuelles \bar{x} - \bar{y} -Koordinatensystem gelegt wird. Dies

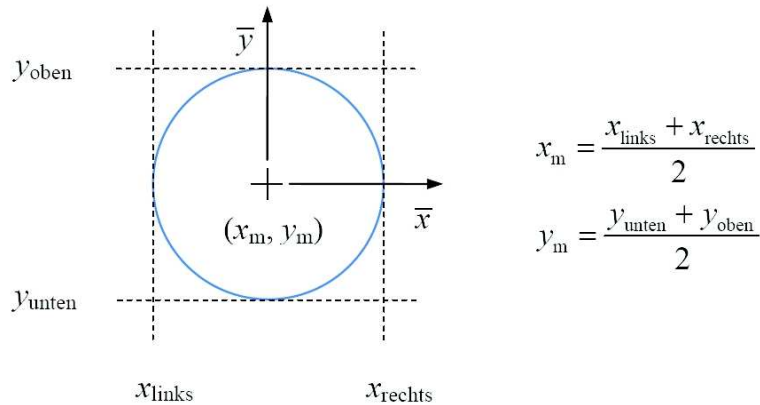


Abbildung 9.5: Probenpositionierung mit x - y -Tisch unter Mikroskop des Härteprüfgerätes

ist schematisch in Abbildung 9.5 dargestellt. Der Härteeindruck kann dann gezielt auf der Oberfläche positioniert werden. Die Genauigkeit hängt nur von der Genauigkeit des Härteprüfgeräts ab, unter der Voraussetzung, dass die Probenscheiben ideal rund sind und der Rand glatt. Die Wegauflösung des x - y -Tisches betrug $10\ \mu\text{m}$. Die Wiederholgenauigkeit des Härteeindrucks (Fadenkreuz im Mikroskop) betrug ca. $10\ \mu\text{m}$. Durch die Rauigkeit des gelaserten Probenrandes kann von einem Fehler bei der Bestimmung der Probenmitte von ca. $20\ \mu\text{m}$ ausgegangen werden. In Summe wird der größtmögliche Fehler für die Positionierung des Indentereindrucks mit $40\ \mu\text{m}$ abgeschätzt, was einem Hundertstel des Probenradius entspricht.

9.4 Belastung im SPT

Die mit Rissen präparierten Proben wurden in gleicher Weise geprüft wie zuvor die Proben ohne Riss. Aufgrund der axialsymmetrischen Geometrie und Belastung erfahren die Risse im Idealfall reine Modus-I-Belastung. Geringe Abweichungen von der idealen Geometrie können jedoch nicht ausgeschlossen werden. Der Versuch wurde mit konstanter Vorschubgeschwindigkeit von $0,05\ \text{mm/min}$ durchgeführt. Die relativ langsame Belastungsgeschwindigkeit wurde gewählt, um mögliches langsames Risswachstum sichtbar zu machen. Den Verlauf der Kraft-Zeit-Kurve zeigt Abbildung 9.6. Das Zeitsignal ermöglicht eine bessere Auflösung der Belastungskurve, es wird praktisch ohne Digitalisierungsfehler gemessen und ist aufgrund der konstanten Vorschubgeschwindigkeit der Prüfmaschine proportional zum Maschinenweg. Da die Maschinensteifigkeit während der Probenbelastung quasi konstant bleibt, bedeutet eine Anstiegsänderung der Kraft-Zeit-Kurve eine Steifigkeitsänderung der belasteten Proben, die aufgrund des linearelastischen Materialverhaltens nur durch stabiles Wachstum der Risse erklärt werden kann. Der Anstieg vermindert sich deutlich erkennbar oberhalb von etwa $40\ \text{N}$. Die Maximalkraft zu Beginn der instabilen Rissausbreitung liegt zwischen 40 und $50\ \text{N}$.

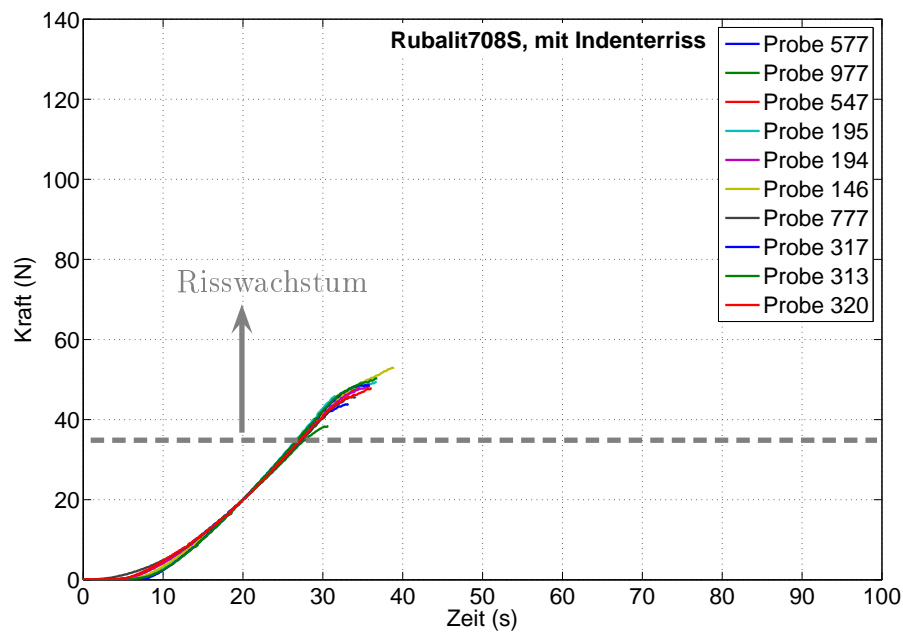


Abbildung 9.6: Kraft-Zeit-Kurven im SPT bis zum Versagen der Keramikproben mit Indenterriss bei konstanter Belastungsgeschwindigkeit (0,05 mm/min)

9.5 FEM-Berechnung des Spannungsintensitätsfaktors an der Rissfront

Die Berechnung des Spannungsintensitätsfaktors K_I entlang der Rissfront eines halbelliptischen Oberflächenrisses unter zweiachsiger Biegebelastung ist mit analytischen Methoden nicht mehr möglich, jedoch eignet sich die FEM sehr gut für dessen numerische Berechnung. Mit ABAQUS wurden dreidimensionale Modelle mit variierter Rissgeometrie erstellt. Es wurden quadratische Elemente mit reduzierter Integration verwendet (C3D20R). Aufgrund der Spiegelsymmetrie bezüglich der Rissebenen der rechtwinklig kreuzenden Oberflächenrisse genügt ein Viertelmodell der Probe. Eine weitere Symmetrie besteht bezüglich der 45°-Ebene zwischen den sich kreuzenden Rissen. Bei Voruntersuchungen an einem Achtel-Modell hat sich jedoch herausgestellt, dass es sich nicht besser vernetzen lässt als ein Viertelmodell und die Genauigkeit bei der Berechnung des Spannungsintensitätsfaktors sogar schlechter ist. Abbildung 9.7 zeigt ein Beispiel für eine vernetzte Viertelprobe. Der linke Riss wurde mit Rissspitzenelementen (Viertelpunktelemente mit kollabierten Elementflächen) vernetzt, der rechte Riss mit regulären Elementen.

Der Spannungsintensitätsfaktor entlang des Risspfades kann durch Postprocessing der FEM-Ergebnisse berechnet werden. Zwei einfach zu realisierende Methoden werden hier verwendet:

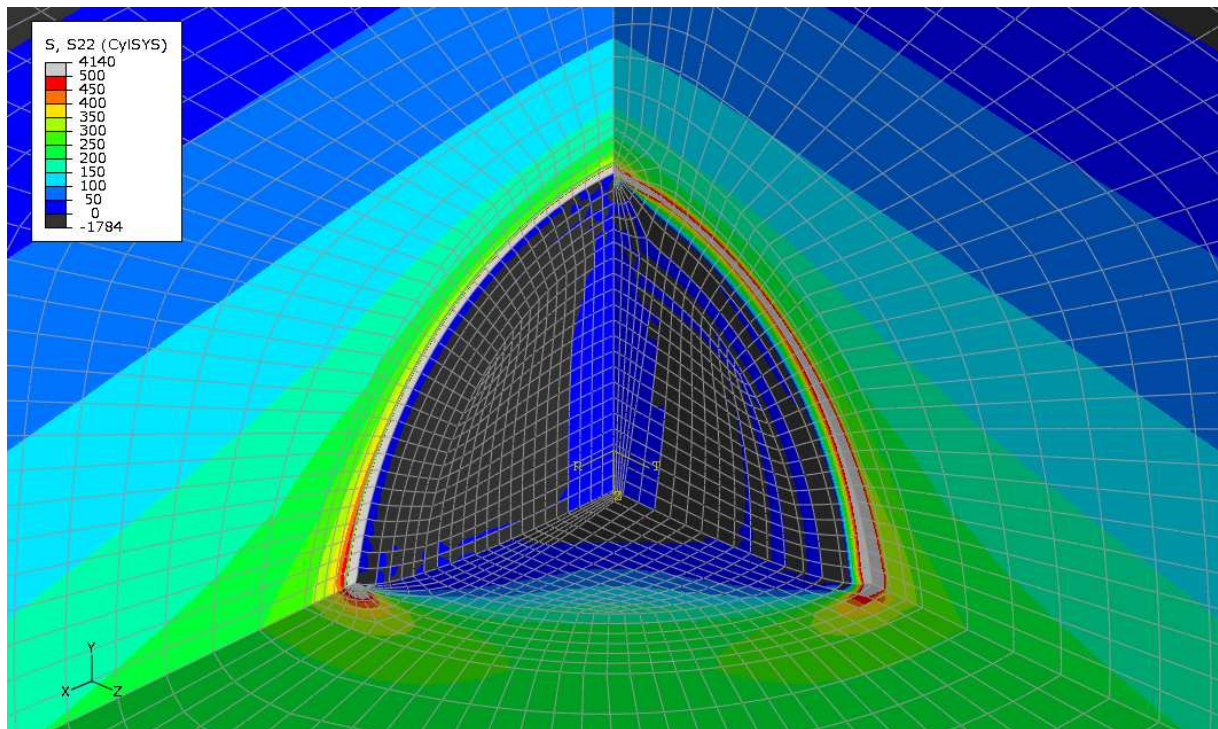


Abbildung 9.7: Konturplot der Umfangsspannungen auf der Zugseite einer Small-Punch-Probe mit kreuzenden halbelliptischen Oberflächenrissen. Viertelmodell der Probe mit zwei Rissen, linker Riss mit singulären Risspitzenelementen, rechter Riss mit regulären Elementen

Methode 1: Umrechnung des von ABAQUS ausgegebenen J -Integral-Wertes in den K_I -Wert mit der bekannten Beziehung von Irwin (4.114).

Methode 2: Auswertung der Rissuferverschiebungen der Elemente an der Risspitze mit Hilfe der Auswerteformel für räumliche Viertelpunktelemente (4.116).

Beide Methoden liefern fast gleiche Ergebnisse, außer im Kreuzungspunkt der beiden Risse. Methode 2 kann nur für den linken Riss mit den speziellen Risspitzenelementen verwendet werden, Methode 1 auch für den rechten Riss mit regulären Elementen. Methode 1 hat den Vorteil, dass die Vernetzung beider Risse ohne Genauigkeitseinbußen bei der K_I -Berechnung auch mit regulären Elementen erfolgen kann, was insbesondere bei Variation der Rissparameter eine erhebliche Vereinfachung des Vernetzungsaufwandes darstellt und obendrein die Elementanzahl des Modells verringern hilft.

Die Infolge des Indentereindrucks in der Probe verbleibenden Eigenspannungen wurden bei der FE-Analyse vernachlässigt, sie müssen jedoch beim Vergleich mit dem Experiment in Betracht gezogen werden. Abbildung 9.8 zeigt die mit der FEM berechnete Verteilung des Spannungsintensitätsfaktors K_I entlang der Rissfront über dem Ellipsenwinkel ϕ für zunehmende Oberflächenrisslänge c bei konstanter Risstiefe a und konstanter Stempelkraft. In Probenmitte, wo sich die Risse kreuzen, ist der ebene Spannungsintensitätsfaktor

K_I nicht gültig. Deshalb wurde K_I für den Elementring an der Ecke des Viertelmodells ($\phi = 90^\circ$) nicht ausgegeben. Zum Vergleich wurde das Ergebnis geplottet, das man für einen einzelnen halbelliptischen Oberflächenriss unter einachsiger Biegebelastung mit der Gleichung von NEWMAN und RAJU [New81] erhält. Für einen halbkreisförmigen Riss wird das maximale K_I ein paar Mikrometer unterhalb der Oberfläche bei $\phi = 1^\circ \dots 2^\circ$ berechnet. Diesen Effekt sieht man aber nur, wenn die Vernetzung entlang der Rissfront fein genug ist. Im Modell wurden 30 Elemente bzw. 61 Knoten entlang der Viertelellipse verteilt, was einer Auflösung von $1,5^\circ$ entspricht. Mit zunehmender Tiefe (zunehmendes ϕ) sinkt K_I . Wenn bei unveränderter Risstiefe und konstanter Last die Länge des Risses an der Oberfläche wächst, also das c/a -Verhältnis zunimmt, nimmt auch K_I in der Tiefe zu. Bei $\phi = 20^\circ$ ändert sich K_I mit Änderung des c/a -Verhältnisses nicht. Näher an der Oberfläche nimmt K_I bei Vergrößerung des c/a -Verhältnisses ab. Bei $c/a = 2$ ist K_I über der gesamten Rissfront nahezu konstant. Eine weitere Vergrößerung des c/a -Verhältnisses führt zum Kippen des Kurvenverlaufs, dann nimmt K_I mit zunehmender Tiefe zu und auch der Maximalwert nimmt zu, d.h. der Riss wächst in die Tiefe und das c/a -Verhältnis wird nicht weiter ansteigen. Es kann angenommen werden, dass sich eine von der Ellipsenform geringfügig abweichende Rissgeometrie einstellt, bei der K_I tatsächlich konstant ist, allerdings wird die Ellipsenform als gute Näherung betrachtet.

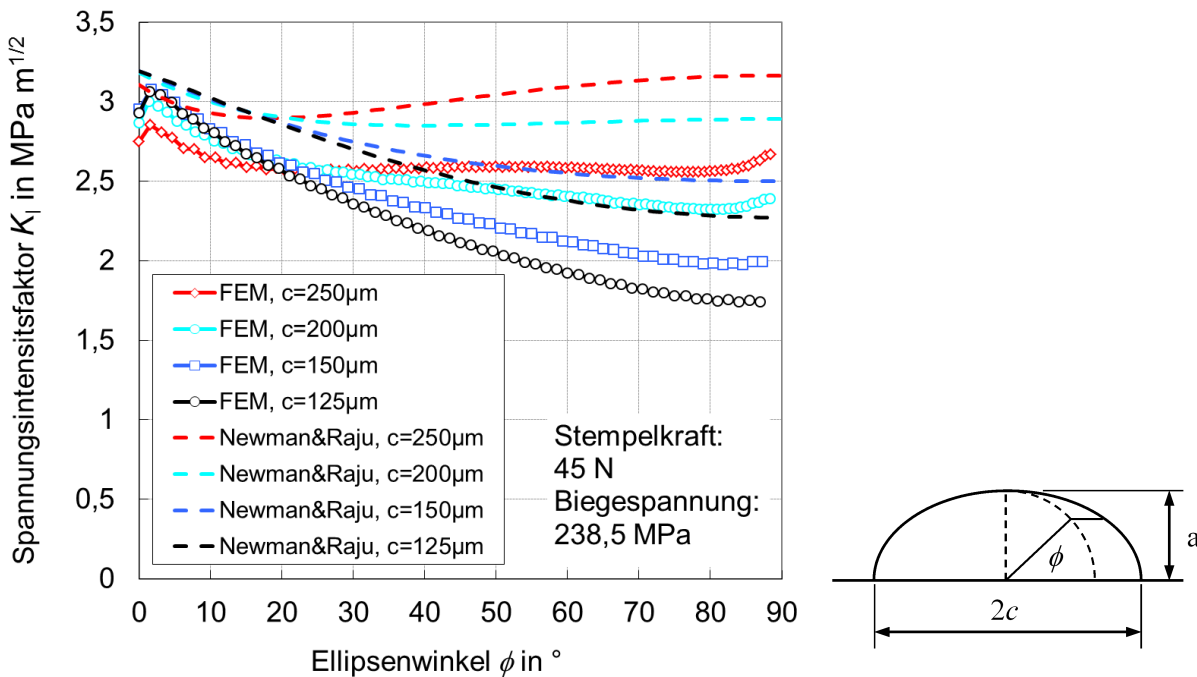


Abbildung 9.8: Modus-I-Spannungsintensitätsfaktor entlang des Rissfront in der SPT-Probe für konstante Risstiefe $a = 125 \mu\text{m}$ und zunehmende Risslänge c (Oberfläche: $\phi = 0^\circ$, tiefster Punkt $\phi = 90^\circ$) berechnet mit der FEM (Methode 2) und Näherungslösung von NEWMAN und RAJU

Der Spannungsintensitätsfaktor für die SPT-Probe mit Riss kann allgemein in der Form

$$K_{I,\text{appl}} = \sigma_{\max} \sqrt{\pi c} Y_I\left(\frac{a}{c}, \frac{a}{h}, \phi\right) \quad (9.2)$$

aufgeschrieben werden. σ_{\max} ist die maximale Biegezugspannung in der Mitte einer Probe ohne Riss und Y_I ein Geometriefaktor, der von der Rissgeometrie, der Probendicke h und dem Ellipsenwinkel ϕ abhängt. Für einen halbkreisförmigen Riss der Größe $a = c = 125 \mu\text{m}$ wird bei einer Probendicke $h = 0,6 \text{ mm}$ an der Stelle, wo $K_{I,\text{appl}}$ maximal ist, der Wert $Y_I = 0,65$ erhalten. Für einen halbelliptischen Riss der Größe $a = 125 \mu\text{m}$, $c = 2a = 250 \mu\text{m}$ wird der Wert $Y_I = 0,42$ erhalten.

Den Verlauf der Zugspannungsverteilung (Umfangsspannung $\sigma_{\varphi\varphi}$) auf der Probenunterseite zeigt Abbildung 9.9. Die Spannung nimmt nicht etwa wie in einer 3-Punkt-Biegeprobe linear ab, sondern deutlich schneller. Das bedeutet für einen an der Oberfläche wachsenden Riss, dass er sich selbst entlastet, wenn er groß genug ist. Daher ist es nicht verwunderlich, dass der K_I -Wert an der Oberfläche unterhalb der Lösung von NEWMAN und RAJU liegt, die für eine konstante Biegespannungsverteilung gilt.

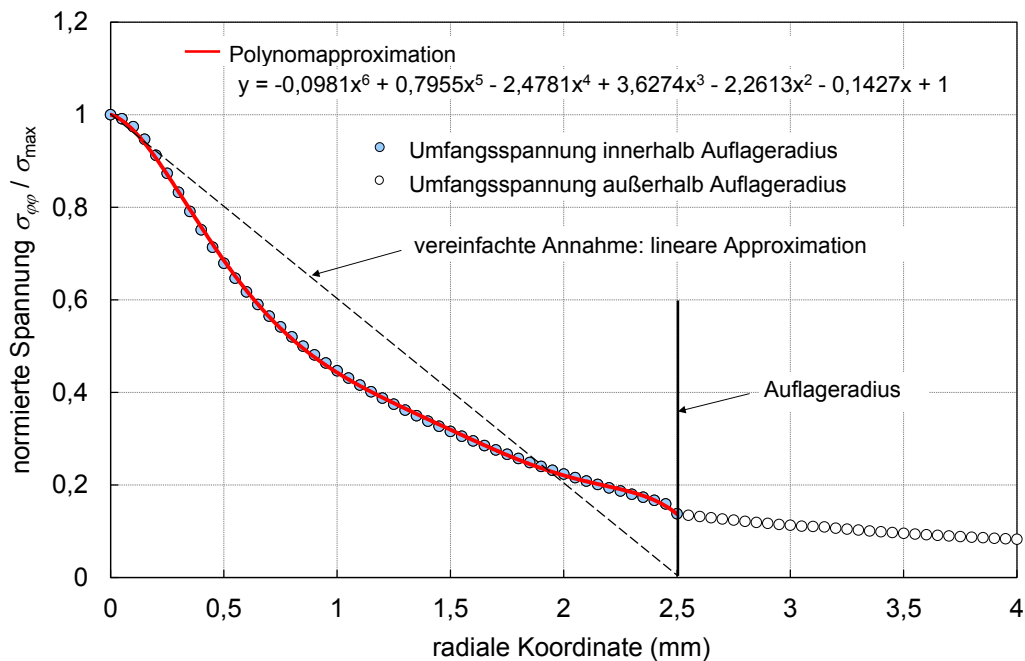


Abbildung 9.9: Normierte Umfangsspannung über dem Radius auf der gesamten Unterseite der Small-Punch-Probe

9.6 Abschätzung von K_{Ic}

Aus der FEM-Parameterstudie und den gemessenen Belastungskurven wird folgende Schlussfolgerung gezogen: In der belasteten SPT-Probe mit Vickers-Riss setzt zunächst stabiles Risswachstum an der Oberfläche ein. Weil der Riss sich dabei selbst geringfügig entlastet, ist eine Laststeigerung notwendig. Das c/a -Verhältnis nimmt zu, bis K_I bei ca. $c/a = 2$ in der Tiefe $\phi = 90^\circ$ den gleichen Wert wie an der Oberfläche $\phi = 0^\circ$ erreicht hat. Immerhin ist dabei eine Laststeigerung von ca. 10% möglich, bevor der Riss instabil wird.

Andere Effekte, wie die Zugeigenspannungen infolge des Indentereindrucks, die zu einem positiven $K_{I, \text{res}}$ führen, blieben bis hierhin unberücksichtigt, genauso wie eine möglicherweise ansteigende R-Kurve des Keramikwerkstoffs. Die Vernachlässigung von $K_{I, \text{res}}$ führt zu einer Unterschätzung von K_{Ic} :

$$K_{Ic, \text{appl}} \leq K_{Ic} . \quad (9.3)$$

Der aus der Kraft-Verschiebungs-Kurve und den FEM-Ergebnissen abzuschätzende kritische Spannungsintensitätsfaktor $K_{Ic, \text{appl}}$ für die im SPT aufgebrachte Biegebelastung stellt eine konservative Abschätzung dar. Für $c/a = 2$, $c = 125 \mu\text{m}$ und Bruchkräfte zwischen 40 N und 50 N werden $K_{Ic, \text{appl}}$ -Werte zwischen $2,5 \text{ MP}\sqrt{\text{m}}$ und $3,1 \text{ MP}\sqrt{\text{m}}$ erhalten. Mit der SEVNB-Methode [Dam98, Dan04] wurde am ISFK der Montanuniversität Leoben der Referenzwert $K_{Ic} = 3,5 \text{ MP}\sqrt{\text{m}}$ (5 Proben, Standardabweichung $0,2 \text{ MP}\sqrt{\text{m}}$) bestimmt. Der aus den SPT-Ergebnissen abgeschätzte Wert liegt also 10% bis 30% darunter.

Um korrekte K_{Ic} -Werte zu erhalten, müssten die Eigenspannungen berücksichtigt oder entfernt werden und das stabile Risswachstum in der SPT-Probe gemessen werden. Die Eigenspannungen können durch Abschleifen einer Oberflächenschicht von der Tiefe der plastisch deformierten Zone entfernt werden. Die tatsächlichen Rissabmessungen zum Versagenszeitpunkt, die offensichtlich größer sind als nach Einbringen des Indenterrisses, wurden bisher nur anhand der Anfangsrissgröße und theoretischen Überlegungen abgeschätzt, ihre Messung würde die Berechnung genauer Bruchzähigkeitswerte ermöglichen. Die Rissausdehnung in der Tiefe kann wie hier vorgestellt mit der Fluoreszenzmethode auf der Bruchfläche vermessen werden.

Nichtsdestotrotz können mit der hier vorgestellten Methode brauchbare Bruchzähigkeitswerte abgeschätzt werden. Der experimentelle Aufwand ist nicht größer als bei der ISB-Methode. Wenn die Geometriefunktion $Y_I(\frac{a}{c}, \frac{a}{h}, \phi)$ in Gl. (9.2) berechnet worden ist, kann damit eine ähnlich einfache Auswertung wie mit der Handbuchlösung von NEWMAN und RAJU erfolgen.

10 Zusammenfassung

Der Small-Punch-Test eignet sich aufgrund seines geringen Materialbedarfs insbesondere für die minimalinvasive Werkstoffprüfung. Die kleinen scheibchenförmigen Proben werden durch einen Stempel zentrisch belastet bis Materialversagen eintritt. Dabei wird die Kraft-Verschiebungs-Kurve aufgezeichnet. Der ausführliche Literaturüberblick zu Beginn dieser Arbeit zeigt, dass es verschiedene konstruktive Varianten des SPT gibt, die sich hinsichtlich Probenform, Probenabmessungen und Belastungseinrichtung zum Teil erheblich unterscheiden. Die meisten Veröffentlichungen verwenden den SPT mit Niederhalter, der die Probe einspannt. Insbesondere bei sprödem Materialverhalten ist eine solche Verformungsbehinderung jedoch unerwünscht. Bei den ideal spröden keramischen Werkstoffen wäre sie sogar jeglichen Prüfnormen widersprechend. In dieser Arbeit wurde deshalb auf den sonst üblichen Niederhalter verzichtet, sodass der Versuch einem miniaturisierten Scheibenbiegeversuch entspricht, also zur ursprünglichen Form seiner Erfinder [Man81, Hua82] zurückkehrt. Der Verzicht auf den Niederhalter hat auch für duktile Stähle keine Nachteile, im Gegenteil, Versuchsaufbau und -durchführung werden sogar einfacher.

Ursprünglich wurde der SPT für die Prüfung duktiler Werkstoffe mit großen plastischen Verformungsanteilen konzipiert. Kleine Prüfkraft und Stempelverschiebungen bei spröden Materialien stellen besondere Anforderungen an den Versuchsaufbau, der entsprechend angepasst werden musste. Für die Untersuchung des spröden Bruchverhaltens von Stahl in der sogenannten Zähigkeitstieflage müssen die Versuche außerdem bei sehr tiefen Temperaturen durchgeführt werden. Für diesen Zweck wurde eine speziell für den SPT angepasste Kühlapparatur mit flüssigem Stickstoff als Kühlmedium entwickelt. Dadurch dass der SPT direkt in diese Kühlapparatur integriert wurde, konnte ein sehr einfacher und platzsparender experimenteller Aufbau erzielt werden.

In der Vergangenheit war und auch noch in der Gegenwart ist es üblich, lediglich charakteristische Messwerte aus dem SPT mit technischen Kennwerten aus konventionellen Zug- oder Bruchmechanikversuchen zu korrelieren oder qualitative Vergleiche zwischen zwei Werkstoffen durchzuführen. Bisher nahm sich nur ein kleiner Teil der zahlreichen Veröffentlichungen zum SPT des inversen Problems an, direkt aus der Versuchsanantwort der mehrachsigen und inhomogen beanspruchten Probe Parameter für kontinuumsmechanische Materialmodelle zu identifizieren, die dann für die Vorhersage des Verformungs- und Versa-

gensverhaltens von Bauteilen verwendet werden können. Ein wesentlicher Grund dafür ist die komplizierte und aufwendige Lösung des inversen Problems. Der nichtlineare Zusammenhang zwischen Materialparametern und der gemessenen Kraft-Verschiebungs-Kurve kann nicht mehr mit analytische Methoden berechnet werden. Mit der FEM durchgeführte Parameterstudien zeigten allerdings, dass die Kraft-Verschiebungs-Kurve genug Informationen über die inhomogen beanspruchte Probe enthält, um diesen Informationsgehalt für die Materialparameteridentifikation zu erschließen. FEM-Simulationen des Versuchs in Verbindung mit nichtlinearen Optimierungsverfahren sind in dieser Arbeit das Werkzeug, um erfolgreich Parameter für die kontinuumsmechanische Beschreibung des Materialverhaltens zu bestimmen. Der Fokus wurde dabei auf das elastisch-plastische Verformungsverhalten bis zum Versagen durch Spröddbruch gelegt. Als Beispielwerkstoffe wurden zwei gut charakterisierte ferritische Druckbehälterstähle, 22NiMoCr37 und 18Ch2MFA, der lagersgeschweißte Stahl 355 EMZ sowie die Aluminiumoxidkeramik Rubalit708S mit dem SPT untersucht.

Für die Reproduzierbarkeit der Ergebnisse war es notwendig eine Reihe von Festlegungen bezüglich der Probenpräparation, des experimentellen Aufbaus und der FEM-Simulation des SPT zu treffen und zu dokumentieren. Der Vergleich zwischen dem axial-symmetrischen FEM-Modell des gesamten Versuchsaufbaus und dem schließlich in dieser Arbeit verwendeten stark vereinfachten FEM-Modell zeigt, dass damit keine Genauigkeitseinbußen bei der simulierten Kraft-Verschiebungs-Kurve eintreten, wenn die mit dem Gesamtmodell berechnete Apparaturnachgiebigkeit berücksichtigt wird.

Einen großen Anteil dieser Arbeit nimmt die Identifikation von Fließkurvenparametern ein. Das elastisch-plastische Materialverhalten der untersuchten Stähle wird als homogen und isotrop verfestigend angenommen. Dem Materialmodell liegt die inkrementelle Plastizitätstheorie mit der Fließbedingung nach v. MISES zugrunde. Die einachsige Verfestigungskurve wurde durch vier lineare Bereich mit variablem Anstieg bis zu einer plastischen Vergleichsdehnung von 100% modelliert. Bei sprödem Bruchverhalten kann damit der monoton steigende Verlauf der Kraft-Verschiebungs-Kurven bis zum Versagen beschrieben werden. Bei duktilem Versagen wurde für die Identifikation der Fließkurve nur die Kraft-Verschiebungs-Kurve bis kurz vor dem Kraftmaximum verwendet, bis dahin kann die duktile Schädigung im SPT vernachlässigt werden und die plastische Vergleichsdehnung bleibt immer unter 100%. In Vorbereitung der eigentlichen Parameteridentifikation wurde in FEM-Studien der Einfluss der Materialparameter und auch anderer Modellparameter, die als Störgrößen in die Identifikation eingehen, untersucht. Die Resultate dieser Voruntersuchungen bilden die grundlegende Wissensbasis für die Lösung des inversen Problems und schließlich die Interpretation der Identifikationsergebnisse. Für die Identifikation wurde die Response-Surface-Methode in Verbindung mit einem

gradientenbasierten Optimierungsalgorithmus mit Schrittweitedämpfung verwendet. Das quadratische Response-Surface-Modell dient der Approximation des nichtlinearen Zusammenhanges zwischen den Materialparametern (Elastizitätsmodul und fünf Fließkurvenparameter) und der Kraft-Verschiebungs-Kurve. Grundlage bildet eine Datenbasis aus simulierten Kurven mit den systematisch variierten Parametern. Jeder Parametersatz stellt Knotenkoordinaten eines regelmäßigen Gitters im n -dimensionalen Parameterraum dar. Zwischen benachbarten Kurven der Datenbasis wird bezüglich der Modellparameter mehrdimensional quadratisch interpoliert. Die nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate beschriebene Zielfunktion ist daher eine Polynomfunktion vierten Grades in den Parametern. Die Optimierung erfolgt mit einer Kombination aus gedämpften Newton-Verfahren und der Methode des steilsten Abstiegs mit Schrittweitenhalbierung. Als Startnäherungen dienen die Gitterpunkte der Datenbasis mit den kleinsten Zielfunktionswerten. Zusätzliche FEM-Berechnungen sind nach Berechnung der Datenbasis nicht mehr erforderlich, Ableitungen der Zielfunktion nach den Parametern können dank des quadratisch interpolierenden Response-Surface-Modells exakt berechnet werden. Mit dem beschriebenen Verfahren konnten erfolgreich die Fließkurven in Abhängigkeit der Temperatur identifiziert werden. Sogar die lokal veränderlichen Fließkurven im Gefüge einer Laserschweißnaht (Ferrit im Grundwerkstoff, Martensit in der Schmelzzone) konnten identifiziert werden. Die Anpassung der parameteroptimierten Kraft-Verschiebungs-Kurven an die gemessenen Kurven ist so gut, dass die Abweichung geringer als die beobachtete Streuung im Experiment ist. Allerdings lagen die aus dem SPT identifizierten Fließkurven generell wenige Prozent unterhalb der verfügbaren Referenzkurven aus dem Zugversuch. Die vermutete - aber bisher nicht bewiesene - Ursache der systematischen Unterschätzung der Fließspannung gegenüber dem einachsigen Zugversuch liegt in der zweiachsigen Zugbelastung, dem viel kleineren Probenvolumen und dem großen Spannungsgradienten.

Für die bei sehr tiefen Temperaturen spröde versagten Proben aus 22NiMoCr37 und 18Ch2MFA wurden dann die Weibull-Parameter der Festigkeit für das zweiparametrische BEREMIN-Modell und das dreiparametrische Modell von GAO bestimmt. Die globale Beanspruchungsgröße zur Charakterisierung der Spaltbruchversagenswahrscheinlichkeit ist die Weibull-Spannung σ_W . Sie wird in einem speziellen FEM-Postprocessing durch numerische Integration über dem plastifizierten Probenvolumen berechnet. Für die FEM-Spannungsanalyse werden die zuvor identifizierten Fließkurven benötigt. Das Modell von GAO führt als dritten Parameter einen unteren Schwellwert der Weibull-Spannung σ_{Wmin} ein. Die Schätzung der Weibull-Parameter erfolgte alternativ mit der Maximum-Likelihood-Methode und der Median-Rank-Methode. Weil σ_W vom Schätzwert des Weibull-Moduls m abhängt, musste die Parameterschätzung iterativ erfolgen. Die hier durchgeführten Untersuchungen bestätigen die bereits in den letzten Jahren veröffentlichten Aussagen mancher

Autoren, dass die Vernachlässigung eines unteren Schwellwertes der Weibull-Spannung im BEREMIN-Modell eine zu starke Vereinfachung darstellt, denn mit dem Modell von GAO konnte eine bessere Anpassung der Ausfallwahrscheinlichkeit an die experimentell beobachteten Daten erzielt werden. Noch deutlicher wurde dies, als die aus der selben Stichprobe für 22NiMoCr bei -154°C geschätzten Weibull-Parameter auf CT-Proben übertragen wurden, um die Bruchzähigkeitsverteilung vorherzusagen. Mit der Zunahme von σ_{Wmin} geht die Abnahme des Weibull-Moduls (also eine Vergrößerung des vorhergesagten Weakest-Link-Effektes) einher und die vorhergesagte Bruchzähigkeit wird größer (Das plastifizierte Volumen in der CT-Probe ist kleiner als in der SPT-Probe). Die beste Übereinstimmung von Vorhersage und Messergebnissen an CT-Proben konnte für das Modell von GAO mit $m = 4$ erzielt werden.

Die Schätzung der Weibull-Parameter für die Festigkeitsverteilung der Keramikproben erfolgte mit der Maximum-Likelihood-Methode. Um die Festigkeit auf andere Probengeometrien übertragen zu können, war die Berechnung des effektiv beanspruchten Volumens V_{eff} notwendig. Bezüglich des gleichen Referenzvolumens V_0 lieferte der SPT eine sehr gute Übereinstimmung mit dem 4-Punkt-Biegeversuch. Im Vergleich zum Ball-on-three-balls-Test, einem inzwischen standardisierten Versuch für scheibenförmige Proben, lag die Festigkeit etwas niedriger.

Um die Bruchzähigkeit von Keramik mit dem SPT zu bestimmen, wurde ein halbelliptischer Oberflächenriss mit einem Vickers-Indenter in die Zugseite der Probe eingebracht. Die Proben wurden im SPT monoton belastet, bis instabiles Risswachstum zum Versagen führte. Aus dem Verlauf der gemessenen Kraft-Verformungs-Kurve konnte auf stabiles Risswachstum vor Erreichen der Maximalkraft geschlossen werden. Der Spannungsintensitätsfaktor an der Rissfront wurde für verschiedene Verhältnisse von Risslänge und Risstiefe mit Hilfe von FEM-Berechnungen bestimmt und mit der Handbuchlösung von NEWMAN & RAJU verglichen. Die Eigenspannungen infolge des Indentereindrucks wurden bei der Berechnung vernachlässigt. K_I erreicht an der Oberfläche seinen Maximalwert und bleibt annähernd konstant, wenn der Riss an der Oberfläche nach außen wächst, bis die Risslänge sich fast verdoppelt hat. Außerdem nimmt die rissöffnende Zugspannung in Umfangsrichtung rapide ab, wenn der Oberflächenriss eine bestimmte Größe erreicht hat. Zumindest ein Teil des stabilen Risswachstums kann damit erklärt werden. Mögliche weitere Ursachen, die bisher nicht näher untersucht wurden, sind die Zug- und Druckeigenspannungen infolge des Indentereindrucks und eine ansteigende Risswiderstandskurve. Der aus der Anfangsrisslänge berechnete kritische Spannungsintensitätsfaktor ist etwa 20% kleiner als der mit der SEVNB-Methode bestimmte Referenzwert der Bruchzähigkeit. In zukünftigen Experimenten sollten Messungen zum Risswachstum vorgenommen werden und die Eigenspannungen durch Abschleifen der Randschicht beseitigt werden.

Literaturverzeichnis

- [Abe03] ABENDROTH, M. ; KUNA, M.: Determination of deformation and failure properties of ductile materials by means of the small punch test and neural networks. In: *Computational Materials Science* 28 (2003), Nr. 3-4 SPEC. ISS., S. 633–644
- [Abe04] ABENDROTH, Martin: *Identifikation elastoplastischer und schädigungsmechanischer Materialparameter aus dem Small Punch Test*, Technische Universität Bergakademie Freiberg, Diss., 2004
- [Abe04a] ABENDROTH, M. ; KUNA, M.: Determination of ductile material properties by means of the small punch test and neural networks. In: *Advanced Engineering Materials* 6 (2004), Nr. 7, S. 536–540
- [Abe06] ABENDROTH, M. ; KUNA, M.: Identification of ductile damage and fracture parameters from the small punch test using neural networks. In: *Engineering Fracture Mechanics* 73 (2006), Nr. 6, S. 710–725
- [Abe06a] ABERNETHY, R.B.: *The New Weibull Handbook*. 5th edition. North Palm Beach, FL : Abernethy, Robert.B., 2006
- [Abe10] ABERNETHY, R.B.: Discussion of the papers by Olteanu and Freeman, and Genshel and Meeker. In: *Quality Engineering* 22 (2010), Nr. 4, S. 281–283
- [Aka06] AKAGI, M. ; ASANO, T. ; CLARKE, I.C. ; NIIYAMA, N. ; KYOMOTO, M. ; NAKAMURA, T. ; HAMANISHI, C.: Wear and toughness of crosslinked polyethylene for total knee replacements: A study using a simulator and small-punch testing. In: *Journal of Orthopaedic Research* 24 (2006), Nr. 10, S. 2021–2027
- [Alt02] ALT, Walter: *Nichtlineare Optimierung : eine Einführung in Theorie, Verfahren und Anwendungen*. Braunschweig : Vieweg, 2002
- [Alt94] ALTENBACH, J. ; ALTENBACH, H.: *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. Teubner, 1994
- [And05] ANDERSON, Ted L.: *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications*. 3rd edition. CRC Press, 2005
- [Ans81] ANSTIS, G. R. ; CHANTIKUL, P. ; LAWN, B. R. ; MARSHALL, D. B.: A Critical Evaluation of Indentation Techniques for Measuring Fracture Toughness: I, Direct Crack Measurements. In: *Journal of the American Ceramic Society* 64 (1981), Nr. 9, S. 533–538

- [Arn98] ARNOLD, J. C. ; KEEBLE, J. M.: The Use of Miniature Disc Bend Tests with Plastic Materials. In: *Polymer Testing* 17 (1998), Nr. 8, S. 597–611
- [AST02] ASTM International: *ASTM Standard F2183, Standard Test Method for Small Punch Testing of Ultra-High Molecular Weight Polyethylene Used in Surgical Implants*. 2002
- [AST02b] ASTM International: *ASTM Standard E1921, Standard Test Method for Determination of Reference Temperature, T_0 , for Ferritic Steels in the Transition Range*. Philadelphia, 2002
- [Bai83] BAIK, J.-M. ; KAMEDA, J. ; BUCK, O.: Small punch test evaluation of intergranular embrittlement of an alloy steel. In: *Scripta Metallurgica et Materiala* 17 (1983), Nr. 12, S. 1443–1447
- [Bai86] BAIK, Jai-Man ; KAMEDA, J. ; BUCK, O.: Development of Small Punch Tests for Ductile-Brittle Transition Temperature Measurement of Temper Embrittled Ni-Cr Steels. *Conference of Use of Small-Scale Specimens for Testing Irradiated Material. ASTM STP 888*, Philadelphia, 1986, pp. 92-111.
- [Bat74] BATDORF, S. B. ; CROSE, J. G.: A Statistical Theory for the Fracture of Brittle Structures Subjected to Nonuniform Polyaxial Stresses. In: *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME* 41 Ser E (1974), Nr. 2, S. 459–464
- [Ben00] BENEDIX, Ulrich: *Parameterschätzung für elastisch-plastische Deformationsgesetze bei Berücksichtigung lokaler und globaler Vergleichsgrößen*, TU Chemnitz, Diss., 2000
- [Ber83] BEREMIN, F.M. ; PINEAU, A. ; MUDRY, F. ; DEVAUX, J.-C. ; D'ESCATHA, Y. ; LEDERMANN, P.: A local criterion for cleavage fracture of a nuclear pressure vessel steel. In: *Metallurgical Transactions A* 14 (1983), Nr. 11, S. 2277–2287
- [Ber97] BERNAUER, G.: *Einsatz mikromechanischer Schädigungsmodelle im spröduktilen Übergangsbereich*, Universität Karlsruhe, Diss., 1997
- [Ber99] BERNAUER, G. ; BROCKS, W. ; SCHMITT, W.: Modifications of the Beremin model for cleavage fracture in the transition region of a ferritic steel. In: *Engineering Fracture Mechanics* 64 (1999), Nr. 3, S. 305–325
- [Bes04] BESSON, J. (Hrsg.): *Local approach to fracture*. Paris : Les Presses de l'École des Mines, 2004
- [Blu93] BLUMENAUER, H. ; PUSCH, Gerhard: *Technische Bruchmechanik*. 3. Auflage. Leipzig : Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, 1993
- [Bör02] BÖRGER, A. ; SUPANCIC, P. ; DANZER, Robert: The ball on three balls test for strength testing of brittle discs: stress distribution in the disc. In: *Journal of the European Ceramic Society* 22 (2002), Nr. 9-10, S. 1425–1436

- [Bör04] BÖRGER, A. ; SUPANCIC, P. ; DANZER, R.: The ball on three balls test for strength testing of brittle discs: Part II: Analysis of possible errors in the strength determination. In: *Journal of the European Ceramic Society* 24 (2004), Nr. 10-11, S. 2917–2928
- [Bor05] BORDET, S.R. ; KARSTENSEN, A.D. ; KNOWLES, D.M. ; WIESNER, C.S.: A new statistical local criterion for cleavage fracture in steel. Part I: Model presentation. In: *Engineering Fracture Mechanics* 72 (2005), Nr. 3, S. 435–452
- [Bor05a] BORDET, S.R. ; KARSTENSEN, A.D. ; KNOWLES, D.M. ; WIESNER, C.S.: A new statistical local criterion for cleavage fracture in steel. Part II: Application to an offshore structural steel. In: *Engineering Fracture Mechanics* 72 (2005), Nr. 3, S. 453–474
- [Box05] BOX, George E. P. ; HUNTER, J. S. ; HUNTER, William G.: *Statistics for Experimenters: Design, Innovation, and Discovery*. Wiley-Interscience; 2nd edition, 2005
- [Bro99] BROOKFIELD, D.J. ; LI, W. ; RODGERS, B. ; MOTTERSHEAD, J.E. ; HELLEN, T.K. ; JARVIS, J. ; LOHR, R. ; HOWARD-HILDIGE, R. ; CARLTON, A. ; WHELAN, M.: Material properties from small specimens using the punch and bulge test. In: *Journal of Strain Analysis for Engineering Design* 34 (1999), Nr. 6, S. 423–435
- [Bul98] BULLOCH, J. H.: Toughness losses in low alloy steels at high temperatures: an appraisal of certain factors concerning the small punch test. In: *International Journal of Pressure Vessels and Piping* 75 (1998), Nr. 11, S. 791–804
- [Bul04] BULLOCH, J. H.: A study concerning material fracture toughness and some small punch test data for low alloy steels. In: *Engineering Failure Analysis* 11 (2004), Nr. 4, S. 635–653
- [Bur92] BURTH, K. ; BROCKS, W.: *Plastizität. Grundlagen und Anwendungen für Ingenieure*. Braunschweig, Wiesbaden : Vieweg, 1992
- [Bur03] BURSTOW, M.C.: A re-assessment of parameter tuning for the Beremin model using the toughness scaling technique. In: *International Journal of Pressure Vessels and Piping* 80 (2003), Nr. 11, S. 797–805
- [Cam04] CAMPITELLI, E.N. ; SPÄTIG, P. ; BONADÉ, R. ; HOFFELNER, W. ; VICTORIA, M.: Assessment of the constitutive properties from small ball punch test: experiment and modeling. In: *Journal of Nuclear Materials* 335 (2004), Nr. 3, S. 366–378
- [Cam05] CAMPITELLI, E.N. ; SPÄTIG, P. ; BERTSCH, J. ; HELLWIG, C.: Assessment of irradiation-hardening on Eurofer97' and Zircaloy 2 with punch tests and finite-element modeling. In: *Materials Science and Engineering A* 400-401 (2005), S. 386–392

- [Cam09] CAMPITELLI, E.N. ; SPÄTIG, P. ; BERTSCH, J.: Numerical investigation by finite element simulations of the ball punch test: Application to tempered martensitic steels. In: *J Nucl Mater* 386-388 (2009), S. 319–322
- [Cat02] CATHERINE, C.S. ; MESSIER, J. ; POUSSARD, C. ; ROSINSKI, S. ; FOULDS, J.: Small punch test: EPRI-CEA finite element simulation benchmark and inverse method for the estimation of elastic plastic behavior, *Small Specimen Test Techniques: Fourth Volume*, S. 350–370 *ASTM STP 1418*, 2002
- [Cha81] CHANTIKUL, P. ; ANSTIS, G. R. ; LAWN, B. R. ; MARSHALL, D. B.: A Critical Evaluation of Indentation Techniques for Measuring Fracture Toughness: II, Strength Method. In: *Journal of the American Ceramic Society* 64 (1981), Nr. 9, S. 539–543
- [Che96] CHEON, J.S. ; KIM, I.S.: Initial deformation during small punch testing. In: *Journal of Testing and Evaluation* 24 (1996), Nr. 4, S. 255–262
- [Che00] CHEON, J.S. ; KIM, I.S.: Evaluation of thermal aging embrittlement in CF8 duplex stainless steel by small punch test. In: *Journal of Nuclear Materials* 278 (2000), Nr. 1, S. 96–103
- [Che08] CHEON, J.-S. ; JOO, C.-H.: Small punch test for determining a flow stress by using a hybrid inverse procedure. In: *Computational Materials Science* 43 (2008), Nr. 4, S. 744–751
- [CEN06] CEN WORKSHOP AGREEMENT: CWA 15627:2006 (E): Small Punch Test method for Metallic Materials / CEN, Brussels, Belgium.
- [Che67] CHEREPANOV, G.P.: Crack propagation in continuous media. In: *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 31 (1967), Nr. 3, S. 503–512
- [Con08] CONTRERAS, M.A. ; RODRIGUEZ, C. ; BELZUNCE, F.J. ; BETEGON, C.: Use of the small punch test to determine the ductile-to-brittle transition temperature of structural steels. In: *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 31 (2008), Nr. 9, S. 727–737
- [Cue10] CUESTA, I.I. ; ALEGRE, J.M. ; LACALLE, R.: Determination of the Gurson-Tvergaard damage model parameters for simulating small punch tests. In: *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 33 (2010), Nr. 11, S. 703–713
- [Cue11] CUESTA, I.I. ; ALEGRE, J.M.: Determination of the fracture toughness by applying a structural integrity approach to pre-cracked Small Punch Test specimens. In: *Engineering Fracture Mechanics* 78 (2011), Nr. 2, S. 289–300
- [Dam98] DAMANI, R. ; DANZER, R.: A Method for Fracture Toughness Testing of Ceramics - Ready for Standardization. In: BROWN M. W. (Hrsg.): *ECF 12 - Fracture from Defects*, West Midlands: EMAS Publishing, 1998, S. 491–502

- [Dan03] DANZER, R. ; BÖRGER, A. ; SUPANCIC, P. ; RUIZ V., M.A.: A simple strength test for brittle discs [Ein einfacher Festigkeitsversuch für Scheiben aus spröden Werkstoffen]. In: *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik* 34 (2003), Nr. 5, S. 490–498
- [Dan04] DANZER, R. ; LUBE, T.: Werkstoffprüfung keramischer Werkstoffe - ein Überblick. In: *Tagungsband Werkstoffprüfung: Konstruktion, Qualitätssicherung und Schadensanalyse*, M. Pohl, 2004, S. 245–254
- [Dan07] DANZER, R. ; HARRER, W. ; SUPANCIC, P. ; LUBE, T. ; WANG, Z. ; BÖRGER, A.: The ball on three balls test-Strength and failure analysis of different materials. In: *Journal of the European Ceramic Society* 27 (2007), Nr. 2-3, S. 1481–1485
- [Dan08] DANZER, R. ; LUBE, T. ; SUPANCIC, P. ; DAMANI, R.: Fracture of ceramics. In: *Advanced Engineering Materials* 10 (2008), Nr. 4, S. 275–298
- [Die95] DIETZ, M. ; BÜHLING, L.: Indenterbruchmechanische Untersuchungen an Konstruktionskeramik. In: *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik* 26 (1995), Nr. 11-12, S. 615–622
- [DIN07a] Norm DIN EN 843-1 März 2007. *Hochleistungskeramik – Mechanische Eigenschaften monolithischer Keramik bei Raumtemperatur – Teil 1: Bestimmung der Biegefestigkeit*
- [DIN07b] Norm DIN EN 843-5 März 2007. *Hochleistungskeramik – Mechanische Eigenschaften monolithischer Keramik bei Raumtemperatur – Teil 5: Statistische Auswertung*
- [Dob01] DOBES, F. ; MILICKA, K.: Small Punch Testing in Creep Conditions. In: *Journal of Testing and Evaluation* 29 (2001), Nr. 1, S. 31–35
- [Dor83] DOREMUS, R.H.: Fracture statistics: A comparison of the normal, Weibull, and Type I extreme value distributions. In: *Journal of Applied Physics* 54 (1983), Nr. 1, S. 193–198
- [Dor90] DORTMANS, L.J.M.G. ; WITH, G. de: Weakest-link failure predictions for ceramics using finite element post-processing. In: *Journal of the European Ceramic Society* 6 (1990), Nr. 6, S. 369–374
- [DSS09] DASSAULT SYSTÈMES SIMULIA CORP. (Hrsg.): *Abaqus 6.9 Online Documentation*. Providence, RI, USA, 2009.
- [Edi01] EDIDIN, A.A. ; KURTZ, S.M.: Development and validation of the small punch test for UHMWPE used in total joint replacements. In: *Key Engineering Materials* (2001), Nr. 198-199, S. 1–40
- [Ega07] EGAN, P. ; WHELAN, M.P. ; LAKESTANI, F. ; CONNELLY, M.J.: Small punch test: An approach to solve the inverse problem by deformation shape and finite element optimization. In: *Computational Materials Science* 40 (2007), Nr. 1, S. 33–39

- [Ega07a] EGAN, P. ; WHELAN, Maurice P. ; LAKESTANI, F. ; CONELLY, Michael J.: Random depth access full-field low-coherence interferometry applied to a small punch test. In: *Optics and Lasers in Engineering* 45 (2007), Nr. 4, S. 523–529
- [Eto93] ETO, M. ; TAKAHASHI, H. ; MISAWA, T. ; SUZUKI, M. ; NISHIYAMA, Y. ; FUKAYA, K. ; JITSUKAWA, S.: Development of a miniaturized bulge test (small punch test) for post-irradiation mechanical property evaluation, Publ by ASTM, Philadelphia, PA, United States, 1993, S. 241–255
- [Fal04] FALESKOG, J. ; KROON, M. ; ÖBERG, H.: A probabilistic model for cleavage fracture with a length scale-parameter estimation and predictions of stationary crack experiments. In: *Engineering Fracture Mechanics* 71 (2004), Nr. 1, S. 57–79
- [Fet95] FETT, T.: An analysis of the residual stress intensity factor of vickers indentation cracks. In: *Engineering Fracture Mechanics* 52 (1995), Nr. 4, S. 773–776
- [Fin04] FINARELLI, D. ; ROEDIG, M. ; CARSUGHI, F.: Small punch tests on austenitic and martensitic steels irradiated in a spallation environment with 530 MeV protons. In: *Journal of Nuclear Materials* 328 (2004), Nr. 2-3, S. 146–150
- [Fin08] FINARELLI, D. ; CARSUGHI, F. ; JUNG, P.: The small ball punch test at FZJ. In: *Journal of Nuclear Materials* 377 (2008), Nr. 1, S. 65–71
- [Fle98] FLEURY, E. ; HA, J.S.: Small punch tests to estimate the mechanical properties of steels for steam power plant: I. Mechanical strength. In: *International Journal of Pressure Vessels and Piping* 75 (1998), Nr. 9, S. 699–706
- [Fou92] FOULDS, J.R. ; JEWETT, C.W. ; BISBEE, L.H. ; GABEL, T.L. ; VISWANATHAN, R.: In-service steam turbine rotor material evaluation by small punch testing. ASME Book No. PWR-Vol. 18, ASME, New York, NY, 1992, S. 151–157
- [Fou95] FOULDS, J.R. ; WOYTOWITZ, P.J. ; PARNELL, T.K. ; JEWETT, C. W.: Fracture toughness by small punch testing. In: *Journal of Testing and Evaluation* 23 (1995), Nr. 1, S. 3–10
- [Fou96] FOULDS, J.R. ; VISWANATHAN, R.: Nondisruptive material sampling and mechanical testing. In: *Journal of Nondestructive Evaluation* 15 (1996), Nr. 3-4, S. 151–162
- [Fre68] FREUDENTHAL, A.M.: Statistical Approach to Brittle Fracture. In: LIEBOWITZ, H. (Hrsg.): *Fracture* Bd. 2. New York : Academic Press, 1968, S. 591–619
- [Gao98] GAO, X. ; RUGGIERI, C. ; DODDS JR., R.H.: Calibration of Weibull stress parameters using fracture toughness data. In: *International Journal of Fracture* 92 (1998), Nr. 2, S. 175–200
- [Gao99] GAO, X. ; DODDS JR., R.H. ; TREGONING, R.L. ; JOYCE, J.A. ; LINK, R.E.: Weibull stress model to predict cleavage fracture in plates containing surface cracks. In: *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 22 (1999), Nr. 6, S. 481–493

- [Gao00] GAO, X. ; DODDS JR., R.H.: Constraint effects on the ductile-to-brittle transition temperature of ferritic steels: a Weibull stress model. In: *International Journal of Fracture* 102 (2000), Nr. 1, S. 43–69
- [Gao05] GAO, X. ; ZHANG, G. ; SRIVATSAN, T.S.: Prediction of cleavage fracture in ferritic steels: A modified Weibull stress model. In: *Materials Science and Engineering A* 394 (2005), Nr. 1-2, S. 210–219
- [Gid01] GIDDINGS, V. L. ; KURTZ, S. M. ; JEWETT, C. W. ; FOULDS, J. R. ; EDIDIN, A. A.: A small punch test technique for characterizing the elastic modulus and fracture behavior of PMMA bone cement used in total joint replacement. In: *Biomaterials* 22 (2001), Nr. 13, S. 1875–1881
- [Gil89] GILL, P. E. ; MURRAY, W. ; WRIGHT, M. H.: *Practical optimization*. 8. Auflage Academic Press, 1989
- [Gre03] GREVE, R.: *Kontinuumsmechanik : ein Grundkurs für Ingenieure und Physiker; mit 48 Aufgaben mit Lösungen*. Berlin : Springer, 2003
- [Gri21] GRIFFITH, A. A.: The Phenomena of Rupture and Flow in Solids. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character* 221 (1921), S. 163–198
- [Gro07] GROSS, D. ; SEELIG, T.: *Bruchmechanik: Mit einer Einführung in die Mikro-mechanik*. 4. Auflage. Berlin Heidelberg : Springer, 2007
- [Had02] HADAMARD, J. S.: *Sur les problemes aux derivees partielles et leur signification physique*. In: Princeton University Bulletin, S. 49-52, 1902
- [Hau00] HAUPT, P.: *Continuum Mechanics and Theory of Materials*. Berlin Heidelberg : Springer, 2000
- [Hee99] HEERENS, J. ; HELLMANN, D.: European SM&T project: Fracture toughness of steel in the ductile to brittle transition regime. 1999. – GKSS Final Report, Contract MAT1-CT-940080
- [Hee02] HEERENS, J. ; HELLMANN, D.: Development of the Euro fracture toughness dataset. In: *Engineering Fracture Mechanics* 69 (2002), Nr. 4, S. 421–449
- [Hee03] HEERENS, J. ; HELLMANN, D.: Application of the master curve method and the engineering lower bound toughness method to laser welded steel. In: *Journal of Testing and Evaluation* 31 (2003), Nr. 3, S. 215–221
- [Heg93] HEGER, A.: *Bewertung der Zuverlässigkeit mehrachsiger belasteter keramischer Bauteile*. Düsseldorf: VDI-Verl., Universität Karlsruhe, Diss., 1993
- [Hen24] HENCKY, H.: Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen. In: *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 4 (1924), Nr. 4, S. 323–334

- [Hof99] HOFMANN, B.: *Mathematik inverser Probleme*. Stuttgart : Teubner, 1999
- [Hu09] HU, R. ; LING, X.: Three-dimensional numerical simulation on plastic damage in small punch specimen of Zirconium. In: *International Journal of Pressure Vessels and Piping* 86 (2009), Nr. 12, S. 813–817
- [Hua82] HUANG, F. H. ; HAMILTON, M. L. ; WIRE, G. L.: Bend testing for miniature disks. In: *Nuclear Technology* 57 (1982), S. 234–242
- [Hub99a] HUBER, N. ; TSAKMAKIS, Ch.: Determination of constitutive properties from spherical indentation data using neural networks. Part I: The case of pure kinematic hardening in plasticity laws. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 47 (1999), Nr. 7, S. 1569–1588
- [Hub99b] HUBER, N. ; TSAKMAKIS, Ch.: Determination of constitutive properties from spherical indentation data using neural networks. Part II: Plasticity with non-linear isotropic and kinematic hardening. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 47 (1999), Nr. 7, S. 1589–1607
- [Hus02] HUSAIN, A. ; SEHGAL, D.K. ; PANDEY, R.K.: Design of a simple, versatile, small-specimen punch test setup for determination of the mechanical behavior of materials. In: *Experimental Techniques* 26 (2002), Nr. 5, S. 33–38
- [Hus04] HUSAIN, A. ; SEHGAL, D.K. ; PANDEY, R.K.: An inverse finite element procedure for the determination of constitutive tensile behavior of materials using miniature specimen. In: *Computational Materials Science* 31 (2004), Nr. 1-2, S. 84–92
- [Irw57] IRWIN, G.R.: Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. In: *Journal of Applied Mechanics* 24 (1957), S. 361–364
- [Iss06] ISSELIN, J. ; IOST, A. ; GOLEK, J. ; NAJJAR, D. ; BIGERELLE, M.: Assessment of the constitutive law by inverse methodology: Small punch test and hardness. In: *Journal of Nuclear Materials* 352 (2006), Nr. 1-3, S. 97–106
- [Jak96] JAKEL, R.: *Ein Beitrag zur Berechnung und konstruktiven Gestaltung keramischer Bauteile, angewendet am Beispiel eines keramischen Heißgasventilatorrades*, TU Clausthal, Diss., 1996
- [Jia95] JIANG, W. ; LI, J.-F. ; KAWASAKI, A. ; WATANABE, R.: High temperature deformation and fracture behavior in sintered Mo/PSZ composites as evaluated by small punch test. In: *Nippon Kinzoku Gakkaishi/Journal of the Japan Institute of Metals* 59 (1995), Nr. 10, S. 1055–1060
- [Jia03] JIA, X. ; DAI, Y.: Small punch tests on martensitic/ferritic steels F82H, T91 and Optimax-A irradiated in SINQ Target-3. In: *Journal of Nuclear Materials* 323 (2003), Nr. 2-3, S. 360–367
- [Ju03] JU, J.-B. ; JANG, J.-I. ; KWON, D.: Evaluation of fracture toughness by small-punch testing techniques using sharp notched specimens. In: *International Journal of Pressure Vessels and Piping* 80 (2003), Nr. 4, S. 221–228

- [Kam86] KAMEDA, J. ; BUCK, O.: Evaluation of the ductile-to-brittle transition temperature shift due to temper embrittlement and neutron irradiation by means of a small-punch test. In: *Materials Science and Engineering* 83 (1986), Nr. 1, S. 29–38
- [Kam92] KAMEDA, J. ; MAO, X.: Small-punch and TEM-disc testing techniques and their application to characterization of radiation damage. In: *Journal of Materials Science* 27 (1992), Nr. 4, S. 983–989
- [Kas01] KASADA, R. ; MORIMURA, T. ; HASEGAWA, A. ; KIMURA, A.: Effect of helium implantation on mechanical properties and microstructure evolution of reduced-activation 9Cr-2W martensitic steel. In: *Journal of Nuclear Materials* 299 (2001), Nr. 1, S. 83–89
- [Kat09] KATO, T. ; KOMAZAKI, S.-i. ; KOHNO, Y. ; TANIGAWA, H. ; KOHYAMA, A.: High-temperature strength analysis of welded joint of RAFs by small punch test. In: *J Nucl Mater* 386-388 (2009), S. 520–524
- [Kaw89] KAWASAKI, A. ; WATANABE, R. ; JEONG, H. D. ; TAKAHASHI, H.: Evaluation of fracture behavior of metal/ceramic two-phase composite by small punch test. In: *Funtai Oyobi Fumatsu Yakin/Journal of the Japan Society of Powder and Powder Metallurgy* 36 (1989), Nr. 2, S. 217–221
- [Kel99] KELLEY, C. T.: *Iterative methods for optimization*. Philadelphia, Pa. : Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999
- [Kim05] KIM, M.-C. ; OH, Y. J. ; LEE, B. S.: Evaluation of ductile-brittle transition temperature before and after neutron irradiation for RPV steels using small punch tests. In: *Nuclear Engineering and Design* 235 (2005), Nr. 17-19, S. 1799–1805
- [Kre92] KREISSIG, R.: *Einführung in die Plastizitätstheorie. Mit technischen Anwendungen*. Leipzig-Köln : Fachbuchverlag, 1992
- [Kre01] KREISSIG, R. ; BENEDIX, U. ; GÖRKE, U.-J.: Statistical aspects of the identification of material parameters for elasto-plastic models. In: *Archive of Applied Mechanics* 71 (2001), Nr. 2-3, S. 123–134
- [Kro02] KROON, M. ; FALESKOG, J.: A probabilistic model for cleavage fracture with a length scale-influence of material parameters and constraint. In: *International Journal of Fracture* 118 (2002), Nr. 2, S. 99–118
- [Krü99] KRÜGER, S.: *Ein Beitrag zur praxisgerechten Dimensionierung keramischer Bauteile bei mehrachsigen Beanspruchungen*, TU Clausthal, Diss., 1999
- [Kun04] KUNA, M. ; ABENDROTH, M.: Identification and validation of ductile damage parameters by the small punch test. In: *ECF 15: Advanced Fracture Mechanics for Life and Safety Assessments, Stockholm, Sweden, Aug 11-13, 2004*

- [Kun05] KUNA, M. ; ABENDROTH, M.: Testing of ductile materials by the small-punch-test - Determination and transfer of damage parameters [Prüfung duktiler Werkstoffe mit dem Small-Punch-Test - Bestimmung und Übertragung schädigungsmechanischer Parameter]. In: *Materialprüfung/Materials Testing* 47 (2005), Nr. 1-2, S. 45–54
- [Kun10] KUNA, M.: *Numerische Beanspruchungsanalyse von Rissen. Finite Elemente in der Bruchmechanik*. 2. Auflage. Wiesbaden : Vieweg+Teubner, 2010
- [Kun10a] KUNA, M. ; ABENDROTH, M. ; LINSE, T. ; RASCHE, S.: Characterization of temperature and irradiation dependent material properties by means of the small punch test and advanced numerical methods. In: *Metallurgical Journal* 63 (2010), S. 151–160
- [Kur97] KURTZ, S. M. ; FOULDS, J. R. ; JEWETT, C. W. ; SRIVASTAV, S. ; EDIDIN, A. A.: Validation of a small punch testing technique to characterize the mechanical behaviour of ultra-high-molecular-weight polyethylene. In: *Biomaterials* 18 (1997), Nr. 24, S. 1659–1663
- [Lau00] LAUSCHKE, U. ; KUNA, M.: Bestimmung von Verformungs- und Versagenseigenschaften duktiler Werkstoffe aus dem Small-Punch-Test. In: BROCKS, W. (Hrsg.): *32. Tagung des DVM-Arbeitskreises Bruchvorgänge, Themenschwerpunkt: Schädigungsmechanismen und Bruch , DVM-Bericht 232*. Berlin : Deutscher Verband für Materialforschung und -Prüfung e.V., 2000, S. 367–376
- [Lee69] LEE, E. H.: Elastic-plastic deformation at finite strains. In: *Journal of Applied Mechanics* 36 (1969), S. 1–6
- [Li91] LI, J.-F. ; KAWASAKI, A. ; XIE, Z.-Z. ; WATANABE, R.: Evaluation of thermal shock fracture resistance of ceramics by quenching-small punch (SP) test. In: *Nippon Kinzoku Gakkaishi/Journal of the Japan Institute of Metals* 55 (1991), Nr. 4, S. 466–471
- [Li91a] LI, H. ; CHEN, F.C. ; ARDELL, A.J.: A Simple, Versatile Miniaturized Disk-Bend Test Apparatus for Quantitative Yield-Stress Measurements. In: *Metallurgical Transactions A* 22 (1991), Nr. 9, S. 2061–2068
- [Li98] LI, J.-F. ; SHIMODA, N. ; KAWASAKI, A. ; WATANABE, R.: Mechanical Evaluation of Plasma-Sprayed Ceramic/Metal Composites for Functionally Graded Coatings by Means of Small Punch Tests. In: *Funtai Oyobi Fumatsu Yakin/Journal of the Japan Society of Powder and Powder Metallurgy* 45 (1998), Nr. 3, S. 237–241
- [Li99] LI, J.-F. ; WATANABE, R.: Brittle-to-ductile transition and high-temperature deformation in ZrO₂(Y₂O₃) and Al₂O₃ ceramics as evaluated by small punch test. In: *Materials Transactions, JIM* 40 (1999), Nr. 6, S. 508–513
- [Lin10] LINDNER, M.: *Ermittlung der plastischen Anfangsanisotropie durch Eindringversuche*, TU Chemnitz, Diss., 2010

- [Lin06] LINSE, T. ; KUNA, M. ; SCHUHKNECHT, J.: Usage of small-punch-test for the characterisation of reactor vessel steels in the brittle-ductile transition region. In: BESSON, J. (Hrsg.) ; MOINERAU, D. (Hrsg.) ; STEGLICH, D. (Hrsg.): *EURO-MECH MECAMAT 2006 - 9th European Mechanics of Materials Conference: Local Approach to Fracture*, 2006
- [Lin08] LINSE, T. ; KUNA, M. ; SCHUHKNECHT, J. ; VIEHRIG, H.-W.: Usage of the small-punch-test for the characterisation of reactor vessel steels in the brittle-ductile transition region. In: *Engineering Fracture Mechanics* 75 (2008), Nr. 11, S. 3520–3533
- [Lin08a] LINSE, T. ; KUNA, M. ; SCHUHKNECHT, J. ; VIEHRIG, H.-W.: Application of the small-punch-test to irradiated reactor vessel steels in the brittle-ductile transition region. In: *Journal of ASTM International* 5 (2008), Nr. 4
- [Lin08b] LINSE, T. ; KUNA, M.: Characterization of reactor vessel steels in the brittle-ductile transition region. In: *Proceedings 17th European Conference on Fracture*, 2008
- [Lou79] LOUIS, A.K.: *Inverse und schlecht gestellte Probleme*. Stuttgart : Teubner, 1989
- [Lu02] LU, C. ; DANZER, R. ; FISCHER, F.D.: Fracture statistics of brittle materials: Weibull or normal distribution. In: *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* 65 (2002), Nr. 6, S. 067102/1–067102/4
- [Lu02a] LU, C. ; DANZER, R. ; FISCHER, F.D.: Influence of threshold stress on the estimation of the Weibull statistics. In: *Journal of the American Ceramic Society* 85 (2002), Nr. 6, S. 1640–1642
- [Lud09] LUDWIK, P.: *Elemente der technologischen Mechanik*. Springer, 1909
- [Ma10] MA, Y. W. ; YOON, K. B.: Assessment of tensile strength using small punch test for transversely isotropic aluminum 2024 alloy produced by equal channel angular pressing. In: *Materials Science and Engineering: A* 527 (2010), Nr. 16-17, S. 3630–3638
- [Mad04] MADSEN, K. ; NIELSEN, H. B. ; TINGLEFF, O.: Methods for non-linear least squares problems. In: *Tech. Univ. Denmark. Informat. and Math. Model.* 2 (2004)
- [Mah97] MAHNKEN, R. ; STEIN, E.: Concepts and computational methods for parameter identification of inelastic material models. In: OWEN, D. R. J. (Hrsg.) ; OÑATE, E. (Hrsg.) ; HINTON, E. (Hrsg.): *Proc. 5th Int. Conf. on Computational Plasticity (COMPLAS 97)*, 1997
- [Man81] MANAHAN, M. P. ; ARGON, A. S. ; HARLING, O. K.: The development of a miniaturized disk bend test for the determination of postirradiation mechanical properties. In: *J Nucl Mater* 103 & 104 (1981), S. 1545–1550

- [Man82] MANAHAN, M. P.: *The development of a miniaturized disk bend test for the determination of post-irradiation mechanical behavior*, Massachusetts Institute of Technology, Diss., 1982
- [Man83] MANAHAN, M. P.: A New Post-Irradiation Mechanical Behavior Test—The Miniaturized Disk Bend Test. In: *Nuclear Technology* 63 (1983), Nr. 2, S. 295–315
- [Man86] MANAHAN, M. P. ; BROWNING, A. E. ; ARGON, A. S. ; HARLING, O. K.: Miniaturized Disk Bend Test Technique Development and Application. ASTM Spec Tech Publ 888, Philadelphia, PA, USA, 1986, S. 17–49 Conference of Use of Small-Scale Specimens for Testing Irradiated Material
- [Mao87] MAO, X. ; TAKAHASHI, H.: Development of a further-miniaturized specimen of 3 mm diameter for tem disk small punch tests. In: *Journal of Nuclear Materials* 150 (1987), Nr. 1, S. 42–52
- [Mao87a] MAO, X. ; SHOJI, T. ; TAKAHASHI, H.: Characterization of Fracture Behavior in Small Punch Test by Combined Recrystallization-Etch Method and Rigid Plastic Analysis. In: *Journal of Testing and Evaluation* 15 (1987), Nr. 1, S. 30–37
- [Mao91] MAO, X. ; KAMEDA, J.: Small-punch technique for measurement of material degradation of irradiated ferritic alloys. In: *Journal of Materials Science* 26 (1991), Nr. 9, S. 2436–2440
- [Mao91a] MAO, X. ; SAITO, M. ; TAKAHASHI, H.: Small punch test to predict ductile fracture toughness JIC and brittle fracture toughness KIC. In: *Scripta Metallurgica et Materiala* 25 (1991), Nr. 11, S. 2481–2485
- [Mat05] MATH WORKS INC. (Hrsg.): *MATLAB Handbuch*. Math Works Inc., 2005
- [McN91] MCNANEY, J. ; LUCAS, G. E. ; ODETTE, G. R.: Application of ball punch tests to evaluating fracture mode transition in ferritic steels. In: *Journal of Nuclear Materials* 179–181, Part 1 (1991), S. 429–433
- [Mer89] MERCALDI, D. W.: *Surface sampling device*. U.S. Patent 4,845,896, Failure Analysis Associates, Inc., Menlo Park, CA, 1989
- [Mey10] MEYER, M.: *Identification of material parameters in mechanical models*, TU Chemnitz, Diss., 2010
- [Mil02] MILICKA, K. ; DOBES, F.: Application of small punch technique in weld analysis. In: *3rd international HIDA and INTEGRITY conference. Integrity of High Temperature Repair Welds.*, 2002, S. 211–218
- [Mil06] MILICKA, K. ; DOBES, F.: Small punch testing of P91 steel. In: *International Journal of Pressure Vessels and Piping* 83 (2006), Nr. 9, S. 625–634

- [Min92] MINAMI, F. ; BRÜCKNER-FOIT, A. ; MUNZ, D. ; TROLLDENIER, B.: Estimation procedure for the Weibull parameters used in the local approach. In: *International Journal of Fracture* 54 (1992), Nr. 3, S. 197–210
- [Mis87] MISAWA, T. ; ADACHI, T. ; SAITO, M. ; HAMAGUCHI, Y.: Small punch tests for evaluating ductile-brittle transition behavior of irradiated ferritic steels. In: *Journal of Nuclear Materials* 150 (1987), Oktober, Nr. 2, S. 194–202
- [Mis89] MISAWA, T. ; NAGATA, S. ; AOKI, N. ; ISHIZAKA, J. ; HAMAGUCHI, Y.: Fracture toughness evaluation of fusion reactor structural steels at low temperatures by small punch tests. In: *Journal of Nuclear Materials* 169 (1989), Nr. C, S. 225–232
- [Mud87] MUDRY, F.: A local approach to cleavage fracture. In: *Nuclear Engineering and Design* 105 (1987), Nr. 1, S. 65–76
- [Mül99] MÜLLER, K.: *Bruchmechanische Bewertung des Stahles 18Ch2MFA nach dem Rißeinleitungs- und Rißauffangkonzzept.*, TU Bergakademie Freiberg, Diss., 1999
- [Mun99] MUNZ, D. ; FETT, T.: *Ceramics, Mechanical Properties, Failure Behaviour, Materials Selection*. Berlin : Springer, 1999
- [Mur87] MURAKAMI, Y. (Hrsg.): *Stress intensity factors handbook*. Oxford : Pergamon Press, 1987
- [Mye95] MYERS, R. H. ; MONTGOMERY, D. C.: *Response Surface Methodology: Process and Product Optimization Using Designed Experiments*. New York: Wiley, 1995
- [Nel65] NELDER, J. A. ; MEAD, R.: A Simplex Method for Function Minimization. In: *The Computer Journal* 7 (1965), Nr. 4, S. 308–313
- [Nem90] NEMETH, N. N. ; MANDERSCHIED, J. M. ; GYEKENYESI, J. P.: Design of ceramic components with the NASA/CARES computer program / NASA Glenn Research Center. 1990. – Forschungsbericht. – NASA-TM-102369
- [New81] NEWMAN JR., J. C. ; RAJU, I. S.: An empirical stress-intensity factor equation for the surface crack. In: *Engineering Fracture Mechanics* 15 (1981), Nr. 1-2, S. 185–192
- [NIS11] National Institute of Standards and Technology: *NIST/SEMATECH e-Handbook of Statistical Methods*. <http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/>
- [Oku09] OKUDA, N. ; KASADA, R. ; KIMURA, A.: Statistical evaluation of anisotropic fracture behavior of ODS ferritic steels by using small punch tests. In: *J Nucl Mater* 386-388 (2009), S. 974–978

- [Pen09] PEÑUELAS, I. ; CUESTA, I. I. ; BETEGÓN, C. ; RODRIGUEZ, C. ; BELZUNCE, F. J.: Inverse determination of the elastoplastic and damage parameters on small punch tests. In: *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 32 (2009), Nr. 11, S. 872–885
- [Pin06] PINEAU, A.: Development of the local approach to fracture over the past 25 years: Theory and applications. In: *International Journal of Fracture* 138 (2006), Nr. 1-4, S. 139–166
- [Pin08] PINEAU, A.: Modeling ductile to brittle fracture transition in steels - Micro-mechanical and physical challenges. In: *International Journal of Fracture* 150 (2008), Nr. 1-2, S. 129–156
- [Pou04] POUSSARD, C.: ESIS TC8 - Numerical Round Robin on Micro Mechanical Models : Results of Phase III for the Simulation of the Brittle to Ductile transition Curve / CEA Saclay. 2004. – Forschungsbericht
- [Qua02] QUARTERONI, A. ; SACCO, R. ; SALERI, F.: *Numerische Mathematik 1*. Übersetzt von L. Tobiska. Berlin : Springer, 2002
- [Qui02] QUINN, G. D. ; SALEM, J. A.: Effect of lateral cracks on fracture toughness determined by the surface-crack-in-flexure method. In: *Journal of the American Ceramic Society* 85 (2002), Nr. 4, S. 873–880
- [Ras06] RASCHE, S. ; KUNA, M.: Bestimmung von Verformungs- und Festigkeitseigenschaften mit dem Small-Punch-Test - Identifikation von Fließkurven und Materialkennwerten des Sprödbruchs bei tiefen Temperaturen. In: *VDI Berichte* (2006), Nr. 1948, S. 113–122.
- [Ras08] RASCHE, S. ; KUNA, M.: Bestimmung von Verformungs- und Versagenseigenschaften spröd-duktiler Werkstoffe bei tiefen Temperaturen mit dem Small-Punch-Test. In: *DVM-Bericht 240: Zuverlässigkeit von Bauteilen durch bruchmechanische Bewertung: Regelwerke, Anwendungen und Trends*, 2008, S. 63–72. 40. Tagung des DVM-Arbeitskreises Bruchvorgänge
- [Ras10] RASCHE, S. ; BERMEJO, R. ; KUNA, M. ; DANZER, R.: Determination of mechanical properties of brittle materials by using the Small Punch Test and the Ball on three balls test. In: *Proceedings 18th European Conference on Fracture*, 2010
- [Ras11] RASCHE, Stefan ; KUNA, Meinhard: Prediction of fracture toughness of embrittled steels by means of the Small Punch Test. In: *PAMM* 11 (2011), Nr. 1, S. 173–174
- [Ric68] RICE, J. R.: A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. In: *Journal of Applied Mechanics* 35 (1968), S. 376–386
- [Rie05] RIEGER, A.: *Zur Parameteridentifikation komplexer Materialmodelle auf der Basis realer und virtueller Testdaten*. Universität Stuttgart, Diss., 2005

- [Rie98] RIESCH-OPPERMANN, H. ; BRÜCKNER-FOIT, A.: *WEISTRABA. A Code for the Numerical Analysis of Weibull Stress parameters from ABAQUS Finite Element Stress Analysis. Procedural background and Code Description*. Forschungszentrum Karlsruhe, 1998 (FZKA-6155)
- [Rie08] RIESCH-OPPERMANN, H. ; HÄRTELT, M. ; KRAFT, O.: STAU - A review of the Karlsruhe weakest link finite element postprocessor with extensive capabilities. In: *International Journal of Materials Research* 99 (2008), Nr. 10, S. 1055–1065
- [Ros11] ROSAHL, K. ; BOOKER, J.D. ; LEWIS, S. ; SMITH, D.J.: A statistical approach for transferring fracture events across different sample shapes. In: *Engineering Fracture Mechanics* 78 (2011), Nr. 1, S. 47–59
- [Ros82a] ROSSMANITH, H.-P. (Hrsg.): *Finite Elemente in der Bruchmechanik*. Wien : Springer, 1982
- [Ros82b] ROSSMANITH, H.-P. (Hrsg.): *Grundlagen der Bruchmechanik*. Wien : Springer, 1982
- [Rua02] RUAN, Y. ; SPÄTIG, P. ; VICTORIA, M.: Assessment of mechanical properties of the martensitic steel EUROFER97 by means of punch tests. In: *Journal of Nuclear Materials* 307-311 (2002), S. 236–239
- [Rug96] RUGGIERI, C. ; DODDS JR., R.H.: A transferability model for brittle fracture including constraint and ductile tearing effects: A probabilistic approach. In: *International Journal of Fracture* 79 (1996), Nr. 4, S. 309–340
- [Rug01] RUGGIERI, C.: Influence of threshold parameters on cleavage fracture predictions using the Weibull stress model. In: *International Journal of Fracture* 110 (2001), Nr. 3, S.281–304
- [Säh93] SÄHN, S. ; GÖLDNER, H.: *Bruch- und Beurteilungskriterien in der Festigkeitslehre*. Leipzig-Köln : Fachbuchverlag, 1993
- [Sai91] SAITO, M. ; HASHIDA, T. ; TAKAHASHI, H.: Small punch test for ceramic composites at very high temperature, 1991, S. 477–482
- [Sch05] SCHUHKNECHT, J.: *Konstruktion und Fertigung einer SPT-Apparatur für Tieftemperaturversuche.*, TU Bergakademie Freiberg, Diplomarbeit, 2005
- [Ser07] SERRE, I. ; VOGT, J.-B.: Liquid metal embrittlement of T91 martensitic steel evidenced by small punch test. In: *Nuclear Engineering and Design* 237 (2007), Nr. 7, S. 677–685
- [She02] SHEKHTER, A. ; KIM, S. ; CARR, D.G. ; CROKER, A.B.L. ; RINGER, S.P.: Assessment of temper embrittlement in an ex-service 1Cr-1Mo-0.25V power generating rotor by Charpy V-Notch testing, K_{Ic} fracture toughness and small punch test. In: *International Journal of Pressure Vessels and Piping* 79 (2002), Nr. 8-10, S. 611–615

- [Shi00] SHINDO, Y. ; HORIGUCHI, K. ; SUGO, T. ; MANO, Y.: Finite Element Analysis and Small Punch Testing for Determining the Cryogenic Fracture Toughness of Austenitic Stainless Steel Welds. In: *Journal of Testing and Evaluation* 28 (2000), Nr. 6, S. 431–437
- [Shi03] SHINDO, Y. ; NARITA, F. ; HORIGUCHI, K. ; MAGARA, Y. ; YOSHIDA, M.: Electric fracture and polarization switching properties of piezoelectric ceramic PZT studied by the modified small punch test. In: *Acta Materialia* 51 (2003), Nr. 16, S. 4773–4782
- [Sin93] SINCLAIR, A. N. ; LEPPIK, O. ; GAABBANI, M. ; MUKHERJEE, B. ; ALBERTINI, E.: Assessment of fracture toughness by a punch test with miniature specimens. New Orleans, LA, USA : Publ by ASTM, Philadelphia, PA, United States, 1993, S. 162–181
- [Son00] SONG, S.-H. ; FAULKNER, R. G. ; FLEWITT, P. E. J. ; SMITH, R. F. ; MARMY, P. ; VICTORIA, M.: Irradiation-induced embrittlement of a 2.25Cr1Mo steel. In: *Journal of Nuclear Materials* 280 (2000), S. 162–168
- [Spä05] SPÄTIG, P. ; CAMPITELLI, E. N. ; BONADÉ, R. ; BALUC, N.: Assessment of plastic flow and fracture properties with small specimen test techniques for IFMIF-designed specimens. In: *Nuclear Fusion* 45 (2005), Nr. 7, S. 635–641
- [Spe93] SPELLUCCI, P.: *Numerische Verfahren der nichtlinearen Optimierung*. Basel : Birkhäuser, 1993
- [Spr05] SPRINGMANN, M.: *Identifikation von Materialparametern schädigungsmechanischer Gesetze unter Einbeziehung der Dehnungslokalisierung*, TU Bergakademie Freiberg, Diss., 2005
- [Suz92] SUZUKI, M. ; ETO, M. ; NISHIYAMA, Y. ; FUKAYA, K. ; SAITO, M. ; MISAWA, T.: Small specimen test techniques for the evaluation of toughness degradation. In: *Journal of Nuclear Materials* 191-194 (1992), S. 1023–1027
- [Tan09] TANAKA, K. ; AMITA, T. ; SATOU, T. ; KOBAYASHI, K. ; KUSUMOTO, J. ; KANAYA, A.: Evaluation on high temperature fracture toughness of CrMoV cast steel by small punch testing. In: *Int. J. Press. Vessels Pip.* 86 (2009), Nr. 9, S. 643–648
- [Tan05] TANGUY, B. ; BESSON, J. ; PIQUES, R. ; PINEAU, A.: Ductile to brittle transition of an A508 steel characterized by Charpy impact test. Part II: Modeling of the Charpy transition curve. In: *Engineering Fracture Mechanics* 72 (2005), Nr. 3, S. 413–434
- [The87] THEILIG, H. ; NICKEL, J.: *Spannungsintensitätsfaktoren*. Leipzig : Fachbuchverlag, 1987
- [Thi89] THIEMEIER, T.: *Lebensdauervorhersage für keramische Bauteile unter mehrachsiger Belastung*, Universität Karlsruhe, Diss., 1989

- [Ule99] ULE, B. ; SUSTAR, T. ; DOBES, F. ; MILICKA, K. ; BICEGO, V. ; TETTAMANTI, S. ; MAILE, K. ; SCHWARZKOPF, C. ; WHELAN, M. P. ; KOZLOWSKI, R. H. ; KLAPUT, J.: Small punch test method assessment for the determination of the residual creep life of service exposed components: outcomes from an interlaboratory exercise. In: *Nuclear Engineering and Design* 192 (1999), Nr. 1, S. 1–11
- [Ver08] VERMA, V. ; GHOSH, A. K. ; BEHERA, G. ; SHARMA, K. ; SINGH, R. K.: Elastoplastic analysis of a miniature circular disk bending specimen. In: *Journal of Pressure Vessel Technology, Transactions of the ASME* 130 (2008), Nr. 4, S. 0412051–0412057
- [Voc48] VOCE, E.: The relationship between stress and strain for homogeneous deformation. In: *Journal of the Institute of Metals* 74 (1948), S. 537–562
- [Vor95] VORLICEK, V. ; EXWORTHY, L. F. ; FLEWITT, P. E. J.: Evaluation of a miniaturized disc test for establishing the mechanical properties of low-alloy ferritic steels. In: *Journal of Materials Science* 30 (1995), Nr. 11, S. 2936–2943
- [Wal84] WALLIN, K.: The scatter in K_{IC} -results. In: *Engineering Fracture Mechanics* 19 (1984), Nr. 6, S. 1085–1093
- [Wal85] WALLIN, K.: The size effect in K_{IC} results. In: *Engineering Fracture Mechanics* 22 (1985), Nr. 1, S. 149–163
- [Wal02] WALLIN, K.: Master curve analysis of the “Euro” fracture toughness dataset. In: *Engineering Fracture Mechanics* 69 (2002), Nr. 4, S. 451–481
- [Wan08] WANG, Z.-X. ; SHI, H.-J. ; LU, J. ; SHI, P. ; MA, X.-F.: Small punch testing for assessing the fracture properties of the reactor vessel steel with different thicknesses. In: *Nuclear Engineering and Design* 238 (2008), Nr. 12, S. 3186–3193
- [Was06] WASILUK, B. ; PETTI, J. P. ; DODDS JR., R. H.: Temperature dependence of Weibull stress parameters: Studies using the Euro-material. In: *Engineering Fracture Mechanics* 73 (2006), Nr. 8, S. 1046–1069
- [Wei39] WEIBULL, W.: A statistical theory of the strength of materials. In: *Ing. Vetenskaps Akad. Handl.* 151 (1939), Nr. 151, S. 1–45
- [Wei51] WEIBULL, W.: A statistical distribution function of wide applicability. In: *J. Appl. Mech.* 18 (1951), Nr. 3, S. 293–297
- [Wil03] WILLNER, K.: *Kontinuums- und Kontaktmechanik*. Berlin Heidelberg : Springer, 2003
- [Wol94] WOLFERSDORF, L. v.: Inverse und schlecht gestellte Probleme: eine Einführung. In: *Sitzungsberichte der sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig* Bd. 119. Berlin : Akademie Verlag, 1994

- [Xio05] XIONG, Z. ; JIANG, W. ; SHI, Y. ; KAWASAKI, A. ; WATANABE, R.: Evaluation of high-temperature strength of Mo/PSZ composites by modified small punch tests. In: *Materials Transactions* 46 (2005), Nr. 3, S. 631–636
- [Xio05a] XIONG, Z. ; PENG, Q.-S. ; BAI, G.-Z. ; SHI, Y. ; JIANG, W.: Modified small punch tests to evaluate ultimate strength of PLZT ceramics. In: *Wuji Cailiao Xuebao/Journal of Inorganic Materials* 20 (2005), Nr. 6, S. 1379–1384
- [Xio07] XIONG, Z. ; JIANG, W. ; WANG, L. ; SHI, Y.: Cyclic fatigue of alumina ceramics as evaluated by modified small punch tests. In: *Key Engineering Materials* 336-338 III (2007), S. 2426–2428
- [Zid03] ZIDAN, A. A. ; BROOKFIELD, D. J.: A technique for the determination of post-yield material properties from the small punch test. In: *Journal of Strain Analysis for Engineering Design* 38 (2003), Nr. 4, S. 367–370
- [Zho09] ZHOU, Z. ; LING, X.: Ductile damage analysis for small punch specimens of type 304 stainless steel based on GTN model. In: *Journal of Testing and Evaluation* 37 (2009), Nr. 6, S. 538–544

A Anhang

A.1 Theoretische Grundlagen

A.1.1 Wahrscheinlichkeitsverteilung

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zufallsgröße X , welche keine negativen Werte annehmen soll, im Intervall $0 \leq X \leq x$ liegt, wird durch die kumulative Verteilung oder Wahrscheinlichkeitsverteilung $F(x) = P(X \leq x)$ beschrieben. $F(x)$ kann Werte zwischen 0 und 1 annehmen ($F(0) = 0$, $F(\infty) = 1$). Durch Ableitung erhält man die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \quad (\text{A.1})$$

Trägt man $f(x)$ über dem Wert der Zufallsgröße x auf, so wird die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zufallsgröße im Intervall zwischen a und b liegt, durch die Fläche unter der Kurve im Intervall repräsentiert. Es gelten die folgenden Beziehungen:

$$F(x) = \int_0^x f(\bar{x}) d\bar{x}, \quad (\text{A.2})$$

$$P(X \geq x) = \int_x^\infty f(\bar{x}) d\bar{x} = 1 - F(x), \quad (\text{A.3})$$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (\text{A.4})$$

A.1.2 Volumenabhängigkeit der Sprödbbruchwahrscheinlichkeit

Es wird eine allgemeine Herleitung für die Volumenabhängigkeit der Bruchwahrscheinlichkeit nach der Weakest-Link-Theorie angegeben. Es wird von statistisch homogen im Körper verteilten Defekten ausgegangen, d.h. die Wahrscheinlichkeit des Auftretens eines Defektes bestimmter Art, Größe und Orientierung im Volumen ist überall gleich. Weiterhin soll Druckbelastung nicht versagensauslösend sein, also nur positive Zugspannungen

dazu führen, dass Defekte kritisch werden. Die Weakest-Link-Annahme besagt, dass totales Versagen des ganzen Körpers eintritt, sobald nur ein einziger Defekt kritisch wird. Die Wahrscheinlichkeit für keinen kritischen Defekt im Volumen V bei einer Zugbelastung σ ist gleichbedeutend mit der Überlebenswahrscheinlichkeit und wird mit $S(V, \sigma)$ bezeichnet. Ein beliebiges anderes Volumen V_1 , das keine Schnittmenge mit V besitzt, hat die Überlebenswahrscheinlichkeit $S(V_1, \sigma)$. Für die Überlebenswahrscheinlichkeit des zusammengesetzten Volumens gilt dann

$$S(V + V_1, \sigma) = S(V, \sigma) \cdot S(V_1, \sigma). \quad (\text{A.5})$$

Unter der Annahme, dass V_1 konstant sei, ergibt die Ableitung nach V

$$\frac{\partial S(V + V_1, \sigma)}{\partial V} = \frac{\partial S(V, \sigma)}{\partial V} \cdot S(V_1, \sigma). \quad (\text{A.6})$$

Teilt man das Ergebnis durch Gleichung (A.5), erhält man

$$\frac{\frac{\partial S(V + V_1, \sigma)}{\partial V}}{S(V + V_1, \sigma)} = \frac{\frac{\partial S(V, \sigma)}{\partial V}}{S(V, \sigma)}, \quad (\text{A.7})$$

was sich mit Hilfe der Differentiationsregel $f'(x)/f(x) = (\ln f(x))'$ zu

$$\frac{\partial \ln(S(V + V_1, \sigma))}{\partial V} = \frac{\partial \ln(S(V, \sigma))}{\partial V} = -c(\sigma) \quad (\text{A.8})$$

umformen lässt. $c(\sigma)$ ist bezüglich des Volumens eine Konstante. Nach Integration dieser Gleichung erhält man den Ausdruck

$$S(V, \sigma) = \exp(-c(\sigma)V) \quad (\text{A.9})$$

für die Überlebenswahrscheinlichkeit. Das Komplement dazu, die Wahrscheinlichkeit, dass sich in V doch ein kritischer Defekt befindet, ergibt die Bruchwahrscheinlichkeit

$$F(V, \sigma) = 1 - \exp(-c(\sigma)V). \quad (\text{A.10})$$

Demzufolge nimmt mit zunehmendem Volumen die Überlebenswahrscheinlichkeit ab und die Bruchwahrscheinlichkeit zu. Gleichung (A.10) ist sehr allgemein, sie enthält noch keine Annahme über die Art, Orientierung und Größenverteilung der Defekte. Die Funktion $c(\sigma)$ muss daher auch keinem Potenzgesetz folgen und die Bruchwahrscheinlichkeit kann demzufolge auch mit anderen Verteilungsfunktionen als der Weibull-Verteilung beschrieben werden.

A.1.3 Moore-Penrose-Inverse

Die Moore-Penrose Pseudoinverse (siehe auch [Kel99, Mat05]) einer reellen Matrix \mathbf{A} sei mit \mathbf{A}^+ bezeichnet. Sie hat die gleiche Dimension wie die Transponierte von \mathbf{A} und erfüllt die folgenden vier Bedingungen:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A} &= \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+ &= \mathbf{A}^+ \\ (\mathbf{A}\mathbf{A}^+)^T &= \mathbf{A}\mathbf{A}^+ \\ (\mathbf{A}^+\mathbf{A})^T &= \mathbf{A}^+\mathbf{A} \end{aligned} \tag{A.11}$$

Die Berechnung von \mathbf{A}^+ kann mit Hilfe der Singulärwertzerlegung der Matrix \mathbf{A} erfolgen (siehe [Kel99, Mat05]). Wenn \mathbf{A} invertierbar ist, dann stimmen Inverse \mathbf{A}^{-1} und Pseudoinverse \mathbf{A}^+ überein. Wenn \mathbf{A} singulär oder nicht quadratisch ist, dann liefert \mathbf{A}^+ eine kleinste Quadrate Lösung des Gleichungssystems $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, wobei die euklidische Norm $\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2$ minimiert wird.

A.2 Zur Auswertung von Messungen

A.2.1 Numerische Berechnung der Small-Punch-Bruchenergie

Die Berechnung der Small-Punch-Bruchenergie E^{SP} (Gl. (2.1)) erfordert die numerische Integration der Fläche unter der gemessenen F - u -Kurve bis zum Versagen. Die Kurve ist in tabellarischer Form von N Wertepaaren (u_k, F_k) gegeben, wobei die Verschiebung bei Versagen $u_f = u_N$ ist. Die numerische Quadratur erfolgt mit der Trapezregel:

$$E^{\text{SP}} = \int_{u_0}^{u_f} F(u) du \simeq \sum_{k=1}^{N-1} \frac{F_k + F_{k+1}}{2} \cdot (u_{k+1} - u_k) \tag{A.12}$$

A.2.2 Zugversuche für 18Ch2MFA an gekerbten Rundzugproben



Abbildung A.1: Gekerbte Rundzugprobe aus dem Stahl 18Ch2MFA für die Bestimmung von Referenzwerten der Weibull-Parameter des BEREMIN-Modells. Die Probenabmessungen sind: Probendurchmesser 10 mm, Kerbgrunddurchmesser 6 mm, Kerbradius 1 mm.

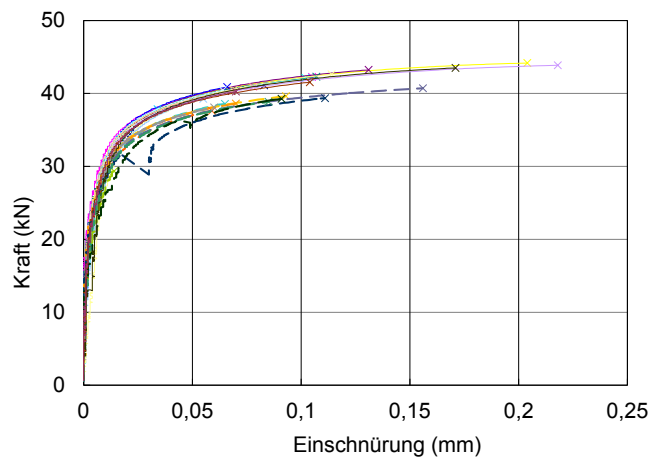


Abbildung A.2: Kraft-Einschnürungs-Kurven der bei -140 °C geprüften gekerbten Rundzugproben aus dem Stahl 18Ch2MFA (29 Proben)

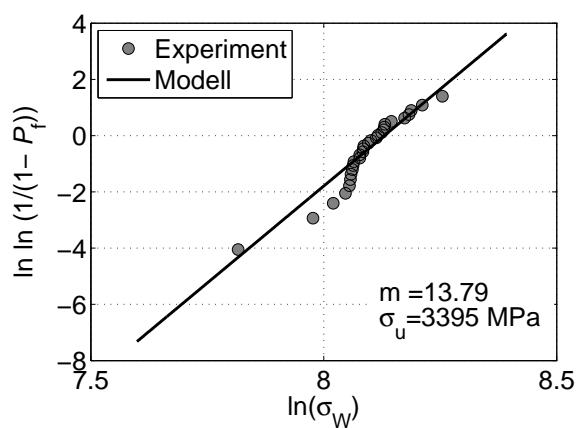


Abbildung A.3: Weibull-Diagramm für Zugversuche von 18Ch2MFA bei -140 °C an gekerbten Rundzugproben mit Ergebnis der Parameterschätzung ($N = 29$)

A.3 FEM-Simulation des SPT

A.3.1 FEM-Simulation des SPT mit/ohne Niederhalter

Die folgenden drei Abbildungen veranschaulichen den Unterschied zwischen dem SPT mit Niederhalter und ohne Niederhalter anhand von FEM-Simulationsergebnissen. Die Materialkennwerte entsprechen dem des elastisch-plastischen Referenzmodells, welches in Kapitel 6 vorgestellt wurde. Der einzige Unterschied in der Belastungsgeometrie besteht in dem Niederhalter, der das Hochklappen des Probenrandes verhindert und dadurch zusätzliche Biegespannungen hervorruft. Der Niederhalter wurde so positioniert, dass zu Beginn der Simulation zwischen ihm und der Probe kein Spiel vorhanden, aber auch die Andruckkraft Null ist.

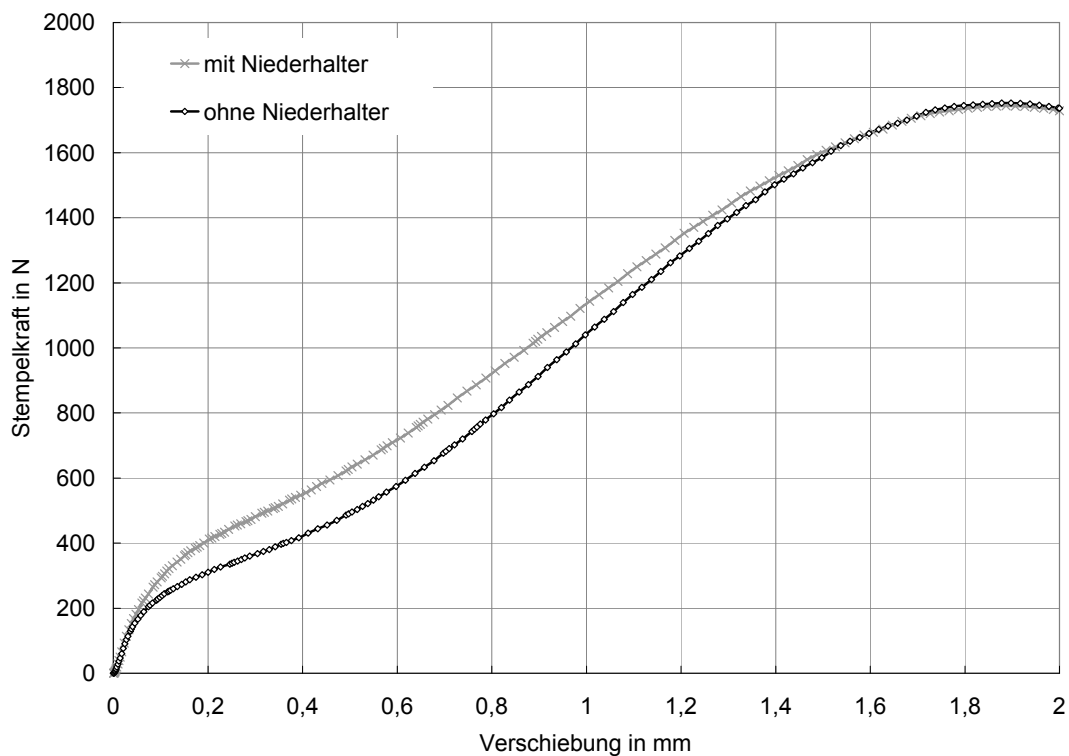


Abbildung A.4: Vergleich der simulierten Kraft-Verschiebungs-Kurven zwischen den Modellen mit und ohne Niederhalter

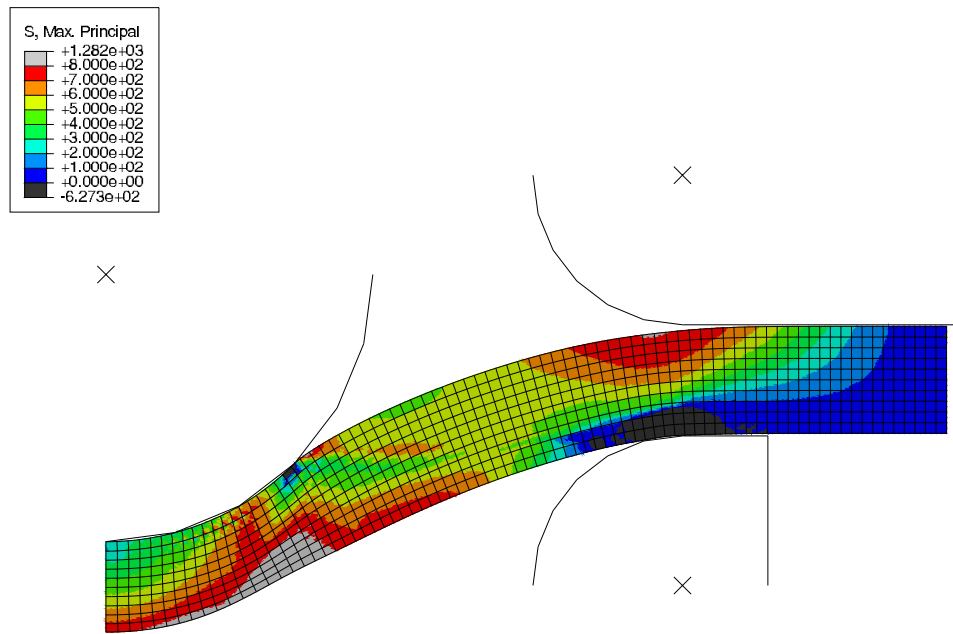


Abbildung A.5: Verteilung der maximalen Hauptspannung σ_I in der Small-Punch-Probe bei einer Stempelverschiebung von 1 mm in der Versuchsanordnung mit Niederhalter

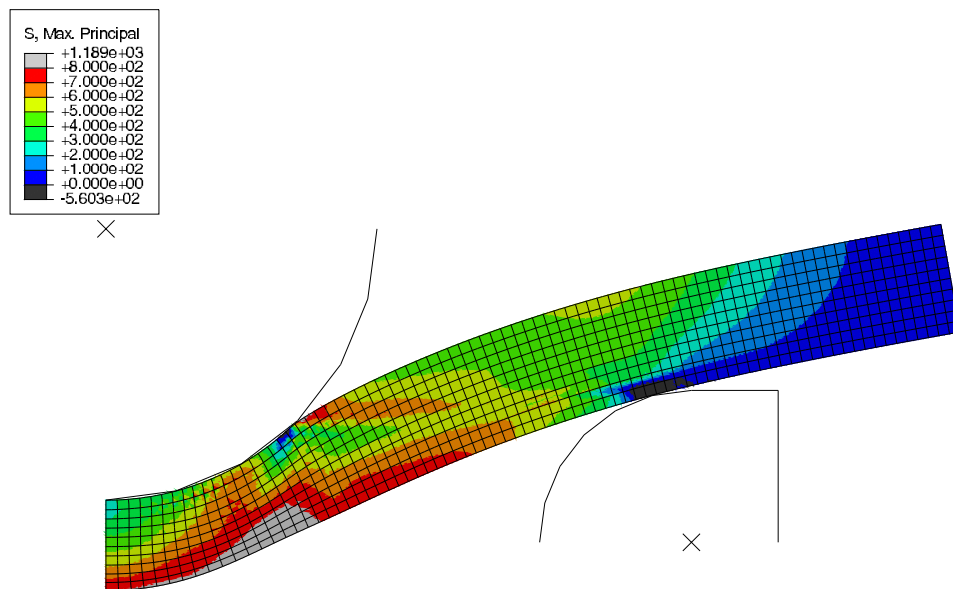


Abbildung A.6: Verteilung der maximalen Hauptspannung σ_I in der Small-Punch-Probe bei einer Stempelverschiebung von 1 mm in der Versuchsanordnung ohne Niederhalter

A.3.2 Einfluss des Stempelradius auf die Spannung in einer Keramikprobe

FE-Berechnungen zeigten, dass in der Kontaktregion unter der Stempelspitze Druckspannungen auftreten, welche die maximale Zugspannung auf der Probenunterseite um ein vielfaches übersteigen. Die Probe soll jedoch in der unteren Probenhälfte im Zugspannungsgebiet versagen. Keramikwerkstoffe besitzen aufgrund ihrer fehlenden Makroplastizität keine Möglichkeit, lokale Spannungsspitzen durch bleibende Verformung abzubauen. Der Krümmungsradius der Stempelspitze beeinflusst maßgeblich die Kontaktspannungen auf der Druckseite der SP-Probe. Der Stempelradius wurde mit der Zielstellung optimiert, versagensauslösende Druckspannungen zu vermeiden und dennoch die bestehende Small-Punch-Apparatur für die Prüfung metallischer Werkstoffe verwenden zu können. Die FE-Berechnungen zur Auslegung des Stempelradius erfolgten mit linearelastischem Material ($E = 410 \text{ GPa}$, $\nu = 0,25$, $\mu = 0,2$) und elastischem Kontakt mit dem Kontaktgesetz nach Gleichung (6.2). Die Auswirkungen des Stempelradius R auf die Verteilung der maximalen und minimalen Hauptspannungen entlang der Symmetrieachse der Small-Punch-Probe bei einer Stempelkraft von 100 N zeigen Abbildung A.7 und A.8. Die z -Koordinate verläuft von der Probenoberseite $z = 0$ (Stempelspitze) zur Probenunterseite $z = 0,6 \text{ mm}$. Die Diagramme zeigen sehr deutlich, dass mit der Vergrößerung des Stempelradius die Spannungen direkt unter der Stempelspitze bedeutend reduziert werden können. Auf die Zugspannungen in der unteren Probenhälfte hat der veränderte Stempelradius dagegen einen fast verschwindenden Einfluss. Der Stempelradius wurde schließlich mit $R = 2,5 \text{ mm}$ gewählt. Dadurch konnte die maximale Druckspannung in der Probe (ca. -3300 MPa) auf den sechsfachen Betrag der maximalen Zugspannung (ca. 550 MPa) begrenzt werden. In der ursprünglichen Konfiguration mit dem Stempelradius $R = 1,25 \text{ mm}$ (Stahlproben) betrug das Verhältnis noch 10:1. Richtwerte für das Verhältnis von Druck- zu Zugfestigkeit für höherfeste Aluminiumoxidkeramik liegen ebenfalls bei etwa 10:1 [Mun99]. Mit dem größeren Stempelradius kann also das unerwünschte Versagen infolge Druckspannungen unter der Stempelspitze vermieden werden.

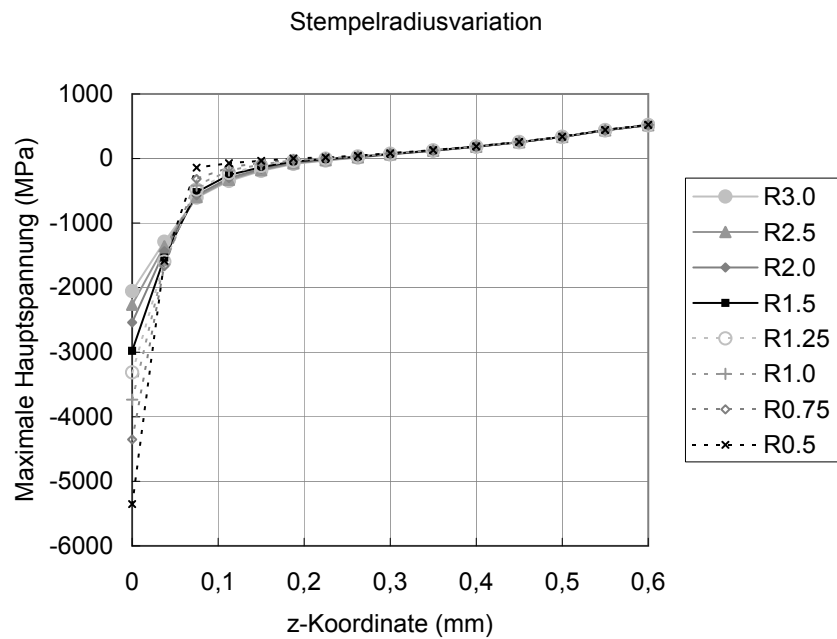


Abbildung A.7: Maximale Hauptspannung entlang der Symmetrieachse der SP-Probe (Oberseite $z = 0$, Unterseite $z = 0,6$ mm) für verschiedene Stempelradien (in mm) bei einer Stempelkraft von 100 N

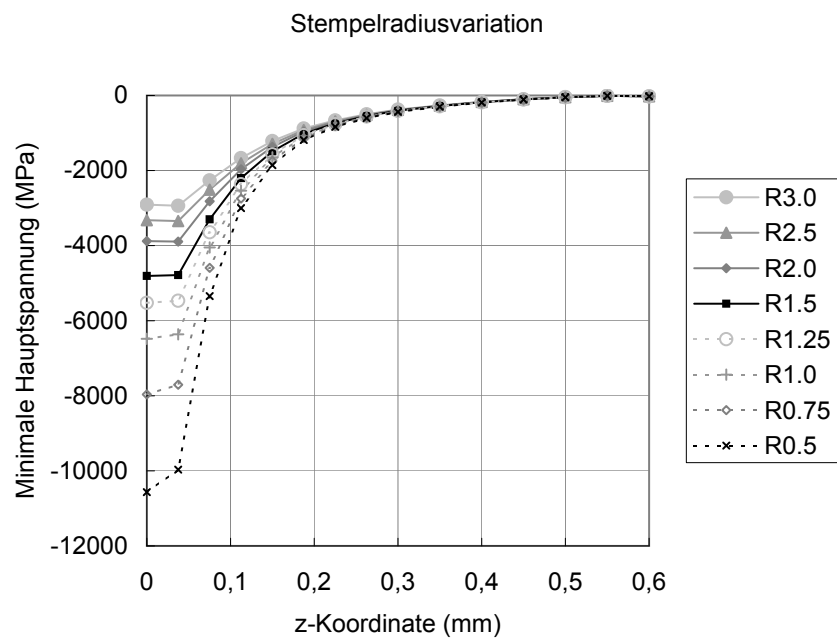


Abbildung A.8: Minimale Hauptspannung entlang der Symmetrieachse der SP-Probe (Oberseite $z = 0$, Unterseite $z = 0,6$ mm) für verschiedene Stempelradien (in mm) bei einer Stempelkraft von 100 N

A.3.3 Parametrisierte ABAQUS-Inputdatei

Quelltext der parametrisierten ABAQUS-Inputdatei „SPvar_elastischplastisch.inp“:

```

** -----
** Parametrisiertes ABAQUS-Inputfile fuer den Small Punch Test
** Referenzmodell Stahl, el.-pl. Material mit isotroper Verfestigung
**
** Stefan Rasche, 25.07.2011
** IMFD TU BA Freiberg
** -----
**
**
*PARAMETER
** Abschnitt 1: vorgegebene Parameter *****
*** zu variierende Parameter
**** Fliesskurve
s0 = 500 # Anfangsfließgrenze
ds1 = 100.0 # Verfestigung 1. linearer Bereich
ds2 = 100.0 # Verfestigung 2. linearer Bereich
ds3 = 100.0 # Verfestigung 3. linearer Bereich
ds4 = 100.0 # Verfestigung 4. linearer Bereich
**** Elastische Konstanten
E = 200000.0 # Elastizitätsmodul
ny = 0.3 # Querkontraktionszahl
**** Geometrie und Reibung
my = 0.2 # Reibkoeffizient
h = 0.5 # Probendicke
D = 8.0 # Probendurchmesser
R = 1.25 # Stempelradius
r = 0.5 # Tiefziehradius
*** feste Parameter
rB = 2.0 # Bohrungsradius
hPunkt=0.002 # Spaltbreite Punktkontakt
hLinie=0.01 # Spaltbreite Linienkontakt
le = 0.05 # Elementkantenlaenge
umax = 2.0 # maximale Stempelverschiebung. entspricht steptime
**
** Abschnitt 2: aus den Parametern berechnete Groessen *****
**** Material
s1 = s0+ds1
s2 = s0+ds1+ds2
s3 = s0+ds1+ds2+ds3
s4 = s0+ds1+ds2+ds3+ds4
**** Geometrie
rA=rB+r # Auflageradius
halfD=D/2
Stempelpos=h+R+hPunkt
Matrizepos=-r-hLinie
**
** Knotennummern und Koordinaten
** o - oben
** u - unten
** i - innen
** a - aussen
** 1 - Ecke

```

```

** 2 - horizontaler Seitenmittelknoten
** 3 - vertikaler Seitenmittelknoten
oa1=int(round(halfD/le*10+1)) #791
oa2=int(round(halfD/le*10-10+2))#782
oa3=int(round(halfD/le*10+3)) #793
ui1=int(round(h/le*1000+1)) #10001
ui2=int(round(h/le*1000+2)) #10002
ui3=int(round(h/le*1000-1000+3))#9003
ua1=int(round(ui1+oa1-1)) #10791
ua2=int(round(ui2+oa2-2)) #10782
ua3=int(round(ui3+oa3-3)) #9793
xi2=le/2
xa2=halfD-le/2
yo3=-le/2
yu3=-h+le/2
xLayer=int(round(halfD/le))
yLayer=int(round(h/le))
**
** ECKELEMENTE
eoi=1
eoa=xLayer
eui=(yLayer-1)*100+1
eua=(yLayer-1)*100+xLayer
** -----
*Heading
** Job name: SPvar_elastischplastisch
*Preprint, echo=NO, model=NO, history=NO, contact=NO
**
** *****
** PARTS
** *****
*Part, name=MatrizeRigid
*End Part
**
*Part, name=Probe
*End Part
**
*Part, name=StempelRigid
*End Part
**
** *****
** ASSEMBLY
** *****
*Assembly, name=Assembly
**
*Instance, name=MATRIZERIGID-1, part=MatrizeRigid
0., -<hLinie>, 0.
*Node
1, <rA>, -<r>
*Nset, nset=MATRIZERIGID-1-RefPt_, internal
1,
*Surface, type=SEGMENTS, name=MATRIZERIGID-1-RIGIDSURFACE
START, 2., -<r>
CIRCL, <rA>, 0., <rA>, -<r>
LINE, 3.1, 0.

```

```

LINE,          3.1,          -<r>
*Rigid Body, ref node=MATRIZERIGID-1-RefPt_, analytical surface=MATRIZERIGID-1-RIGIDSURFACE
*End Instance
**
*Instance, name=STEMPELRIGID-1, part=StempelRigid
  0, <Stempelpos>, 0.
*Node
1, 0, 0
*Nset, nset=STEMPELRIGID-1-RefPt_, internal
1,
*Surface, type=SEGMENTS, name=STEMPELRIGID-1-RIGIDSURFACE
START,          <R>,          0.
  CIRCL,          0.,          -<R>,          0.,          0.
*Rigid Body, ref node=STEMPELRIGID-1-RefPt_, analytical surface=STEMPELRIGID-1-RIGIDSURFACE
*End Instance
**
*Instance, name=Probe-1, part=Probe
  0., <h>, 0.
**
*NODE
1,          0.          , 0.
2,          <xi2> , 0.
3,          0.          , <yo3>
<oa2>, <xa2> , 0.
<oa1>, <halfD>, 0.
<oa3>, <halfD>, <yo3>
<ui3>, 0.          , <yu3>
<ua3>, <halfD>, <yu3>
<ui1>, 0.          , -<h>
<ui2>, <xi2> , -<h>
<ua2>, <xa2> , -<h>
<ua1>, <halfD>, -<h>
*NGEN, NSET=Eckknoten-innen
1, <ui1>, 1000
*NGEN, NSET=Eckknoten-aussen
<oa1>, <ua1>, 1000
*NGEN, NSET=ySeitenmittelknoten-innen
3, <ui3>, 1000
*NGEN, NSET=ySeitenmittelknoten-aussen
<oa3>, <ua3>, 1000
*NGEN, NSET=xSeitenmittelknoten-oben
2, <oa2>, 10
*NGEN, NSET=xSeitenmittelknoten-unten
<ui2>, <ua2>, 10
*NFILL, NSET=Eckknoten
Eckknoten-innen, Eckknoten-aussen, <xLayer>, 10
*NFILL, NSET=ySeitenmittelknoten
ySeitenmittelknoten-innen, ySeitenmittelknoten-aussen, <xLayer>, 10
*NFILL, NSET=xSeitenmittelknoten
xSeitenmittelknoten-oben, xSeitenmittelknoten-unten, <yLayer>, 1000
*NSET, NSET=nsetProbe
Eckknoten, xSeitenmittelknoten, ySeitenmittelknoten
**
*ELEMENT, type=CAX8R
1, 1, 1001, 1011, 11, 3, 1002, 13, 2

```

```

*ELGEN, ELSET=elsetProbe
1, <xLayer>, 10, 1 , <yLayer>, 1000, 100
**
** Section: elasticplasticsection
*Solid Section, elset=elsetProbe, material=elasticplastic
1.,
*End Instance
**
** Sets:
*NSET, nset=RP_Stempel, instance=STEMPELRIGID-1
1,
*NSET, nset=RP_Matrize, instance=MATRIZERIGID-1
1,
*NSET, nset=Knoten-UntenInnen, instance=Probe-1
<ui1>,
*NSET, nset=Knoten-innen, instance=Probe-1
Eckknoten-innen, ySeitenmittelknoten-innen
*ELSET, elset=__PickedSurf-oben_S4, internal, instance=Probe-1, generate
1, <ea>, 1
*SURFACE, type=ELEMENT, name=_PickedSurf-oben, internal
__PickedSurf-oben_S4, S4
*ELSET, elset=__PickedSurf-unten_S2, internal, instance=Probe-1, generate
<ei>, <ea>, 1
*SURFACE, type=ELEMENT, name=_PickedSurf-unten, internal
__PickedSurf-unten_S2, S2
**
*End Assembly
**
** *****
** MATERIALS
** *****
*Material, name=elasticplastic
** elastisch-plastisches Material mit isotroper Verfestigung
*Elastic
<E>, <ny>
*Plastic
<s0>, 0.0
<s1>, 0.03162
<s2>, 0.1
<s3>, 0.3162
<s4>, 1.0
**
** *****
** INTERACTION PROPERTIES
** *****
*Surface Interaction, name=IntProp-1
1.,
*Friction, slip tolerance=0.005
<my>,
*Surface Behavior, pressure-overclosure=EXPONENTIAL
<hPunkt>, 1000.
*Surface Interaction, name=IntProp-2
1.,
*Friction, slip tolerance=0.005
<my>,

```

```

*Surface Behavior, pressure-overclosure=EXPONENTIAL
<hLinie>, 1000.
**
** *****
** BOUNDARY CONDITIONS
** *****
** Name: Matrizize_fix Type: Symmetry/Antisymmetry/Encastre
*Boundary
RP_Matrizize, ENCASTRE
** Name: Probe_symm Type: Symmetry/Antisymmetry/Encastre
*Boundary
Knoten-innen, XSYMM
** Name: Stempel_u Type: Displacement/Rotation
*Boundary
RP_Stempel, 1, 1
RP_Stempel, 2, 2
RP_Stempel, 6, 6
**
** *****
** INTERACTIONS
** *****
** Interaction: Probe-Matrizize
*Contact Pair, interaction=IntProp-2, supplementary constraints=YES
_PickedSurf-unten, MATRIZERIGID-1.MATRIZERIGID-1-RIGIDSURFACE
** Interaction: Stempel-Probe
*Contact Pair, interaction=IntProp-1, supplementary constraints=YES
_PickedSurf-oben, STEMPELRIGID-1.STEMPELRIGID-1-RIGIDSURFACE
** -----
**
** STEP: Down1
**
*Step, name=Down1, nlgeom=YES, inc=2000
*Static
0.001, <umax>, 2e-05, 0.02
**
** BOUNDARY CONDITIONS **
**
** Name: Stempel_u Type: Displacement/Rotation
*Boundary
RP_Stempel, 2, 2, -<umax>
**
** OUTPUT REQUESTS **
**
*Output, field, frequency=1
*Node Output
U,
*Element Output, directions=YES
S,
**
*Output, history
*Node Output, nset=RP_Matrizize
RF2,
*Node Output, nset=RP_Stempel
U2,
*End Step

```

A.3.4 Skriptdatei für Parameterstudie und Datenbasisberechnung

Quelltext der Datei Parameterstudie6p.psf:

```
studie = ParStudy(par=('E','s0','ds1','ds2','ds3','ds4'),name='Es0s1s2s3s4')
studie.define(CONTINUOUS, par='E', domain=(150000., 250000.))
studie.sample(INTERVAL, par='E', interval=50000)
studie.define(CONTINUOUS, par='s0', domain=(500., 500.))
studie.sample(INTERVAL, par='s0', interval=100)
studie.define(CONTINUOUS, par='ds1', domain=(0., 300.))
studie.sample(INTERVAL, par='ds1', interval=100)
studie.define(CONTINUOUS, par='ds2', domain=(0., 300.))
studie.sample(INTERVAL, par='ds2', interval=100)
studie.define(CONTINUOUS, par='ds3', domain=(0., 300.))
studie.sample(INTERVAL, par='ds3', interval=100)
studie.define(CONTINUOUS, par='ds4', domain=(0., 300.))
studie.sample(INTERVAL, par='ds4', interval=150)
studie.combine(MESH,name='pset')
studie.generate(template='SPvar_elastischplastisch')
studie.execute(ALL)
```

Die Datei dient der automatischen Durchführung einer Parameterstudie mit ABAQUS und zur Berechnung der Datenbasis. Der Aufruf erfolgt in der Kommandozeile mit

```
abaqus script=Parameterstudie6p.psf
```

Es wird eine Liste von ABAQUS-Inputfiles mit systematisch variierten Modellparametern erzeugt, mit der dann sequentiell die FE-Simulationen gestartet werden, d.h. eine neue ABAQUS-Rechnung wird erst gestartet, wenn die vorhergehende beendet ist. Die Parameterstudie verwendet die im vorigen Abschnitt gedruckte parametrisierte ABAQUS-Inputdatei.

A.4 Test des Programms SOFI

A.4.1 Reidentifikation von Polynomkoeffizienten

Tabelle A.1: Systematisch variierte Parameter der Datenbasis aus 5040 Kurven zu Reidentifikation des Polynomansatzes (7.60)

Parameter	untere Grenze	obere Grenze	Schrittweite	Faktoranzahl
p_1	10	50	10	5
p_2	0	30	5	7
p_3	0	16	4	4
p_4	0	9	3	4
p_5	0	4	2	3
p_6	0	2	1	3

Tabelle A.2: Reidentifizierte Parameter für den Polynomansatz (7.60)

Kurve		p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	$\Phi(\mathbf{p}_{\text{id}})$
1	exakt	12	11,7	5,6	2,7	3,12	0,76	7.3089e-015
	reidentifiziert	12	11,7	5,5999	2,7001	3,12	0,76	
2	exakt	46	7,2	13,12	6,66	1,96	1,62	8.6997e-015
	reidentifiziert	46	7,2	13,12	6,66	1,9601	1,62	
3	exakt	47,6	12	0,32	1,71	1,76	1,06	1,1713e-014
	reidentifiziert	47,6	12	0,31978	1,7102	1,7599	1,06	
4	exakt	29,6	3,0	0,64	6,21	1,8	0,7	7.1564e-015
	reidentifiziert	29,6	3,0	0,63994	6,2101	1,7999	0,70002	
5	exakt	29,6	3,9	2,72	1,62	1,24	1,88	1,1391e-014
	reidentifiziert	29,6	3,9	2,7202	1,6197	1,2402	1,88	
6	exakt	23,6	28,2	10,4	3,33	2,04	1,76	9,7917e-015
	reidentifiziert	23,6	28,2	10,4	3,3303	2,0398	1,76	
7	exakt	46	28,8	11,68	5,67	2,04	1,1	9,6553e-015
	reidentifiziert	46	28,8	11,68	5,6699	2,0401	1,1	
8	exakt	24,8	17,4	10,4	7,02	3,28	1,24	1,182e-014
	reidentifiziert	24,8	17,4	10,4	7,0203	3,2798	1,24	
9	exakt	14,4	1,8	7,2	0,72	3,16	1,18	7,3759e-015
	reidentifiziert	14,4	1,8	7,2	0,71999	3,16	1,18	
10	exakt	41,2	6,9	8,8	8,37	2,56	0,42	2,7951e-015
	reidentifiziert	41,2	6,9001	8,7998	8,3702	2,5599	0,42001	

A.4.2 Reidentifikation von Parametern des Validierungspatterns

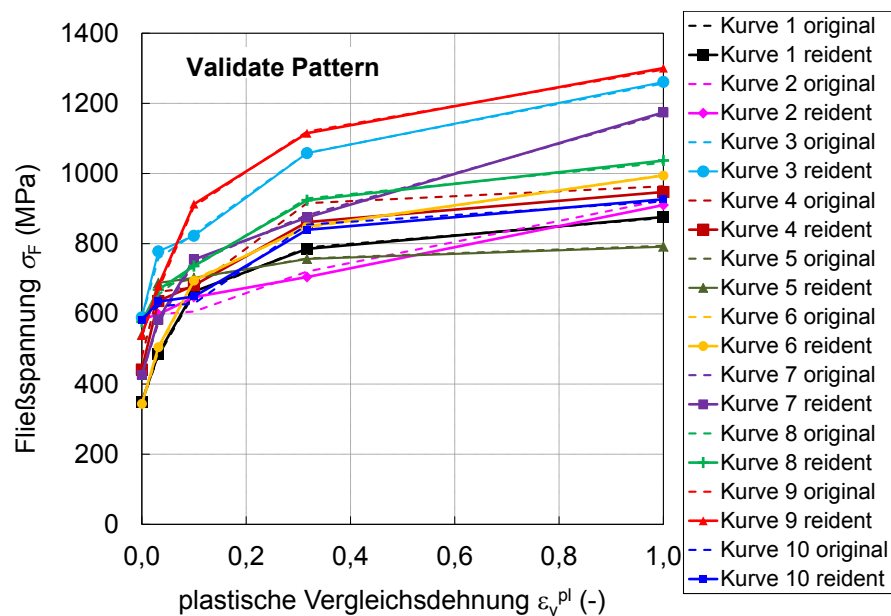
**Abbildung A.9:** Originale Fließkurven des Validierungspatterns und reidentifizierte Kurven

Tabelle A.3: Reidentifizierte Parameter (reident) für das Validierungspattern (original)

Kurve		p_1 (GPa)	p_2 (MPa)	p_3 (MPa)	p_4 (MPa)	p_5 (MPa)	p_6 (MPa)	$\Phi(\mathbf{p}_{\text{ident}})$
1	original	231	348	132	177,5	132	84	
	reident	224,2	348,87	137,63	177,21	121,56	90,82	1,6199e-7
2	original	241	591	8	7,5	114	204	
	reident	248,92	584,17	14,707	48,826	57,163	205,19	7,9697e-6
3	original	163	588	170	70	231	198	
	reident	158,99	589,87	188,26	44,36	235,55	202,85	3,8291e-7
4	original	241	447	186	12,5	240	48	
	reident	249,91	441,23	195,39	44,93	180,11	85,634	1,3175e-6
5	original	213	540	136	25	57	36	
	reident	210,38	539,85	148,53	14,415	53,615	35,159	2,7237e-7
6	original	160	342	152	205	147	150	
	reident	152,89	343,37	161,66	189,91	154,04	145,43	1,4369e-7
7	original	178	426	148	172,5	135	288	
	reident	174,69	425,77	158,08	171,28	119,59	299,4	1,9397e-7
8	original	205	576	78	80	195	102	
	reident	199,88	577,33	91,377	67,661	187,36	113,35	3,5091e-7
9	original	246	537	132	237,5	213	177	
	reident	239,87	538,28	141,83	232,9	201,88	185,53	8,8936e-8
10	original	246	588	34	7,5	225	66	
	reident	249,72	580,98	54,144	14,197	190,38	86,917	3,7756e-6
Differenz	min	-7,11	-35,77	+5,63	-25,64	-59,89	-4,57	
	max	+8,91	+1,87	+20,14	+41,33	+7,04	+37,63	
	mittel	-1,46	-4,33	+11,56	+1,07	-18,78	+9,73	

Bei der Reidentifikation der Parameter der Spannungs-Dehnungs-Kurve des Validierungspatterns wurde die gleiche Datenbasis (Tabelle 7.2) verwendet, wie bei der Parameteridentifikation aus den tatsächlich gemessenen SPT-Kurven.

A.5 Einzelergebnisse Parameteridentifikation am Beispiel der Laserschweißnaht

Tabelle A.4: Aus der F - u -Kurve des SPT identifizierte Parameter für die Schmelzzone bei 20 °C

Versuch Nr.	h (mm)	u_{\min} (mm)	u_{\max} (mm)	E (GPa)	σ_{F0} (MPa)	$\Delta\sigma_1$ (MPa)	$\Delta\sigma_2$ (MPa)	$\Delta\sigma_3$ (MPa)	$\Delta\sigma_4$ (MPa)	$\Phi(\mathbf{p}_{\text{id}})$
1	0,498	0,094	1,472	208,9	761,9	161,5	85,3	26,3	45,9	7,92E-5
2	0,501	0,092	1,571	210,1	797,8	155,1	57,7	106,9	20,9	7,39E-6
3	0,495	0,099	1,578	200,3	718,7	186,0	70,9	85,6	23,4	1,35E-5
4	0,499	0,094	1,529	200,9	792,2	164,3	26,5	103,8	20,7	6,14E-6
5	0,500	0,095	1,496	205,0	784,6	140,9	73,1	98,3	42,9	9,35E-6
6	0,502	0,094	1,527	214,4	777,3	148,6	88,3	36,3	13,6	9,78E-6
7	0,501	0,092	1,586	218,5	782,5	152,4	95,4	60,3	16,3	1,16E-5
8	0,499	0,099	1,545	219,3	718,7	144,0	123,6	54,5	70,4	1,61E-5
9	0,502	0,094	1,554	218,5	774,2	137,8	102,4	70,3	73,5	7,88E-6
10	0,501	0,097	1,584	195,7	785,5	114,8	40,3	145,4	26,5	4,03E-6
Mittel	0,500	0,095	1,544	209,2	769,3	150,5	76,3	78,8	35,4	1,65E-5

Tabelle A.5: Aus der F - u -Kurve des SPT identifizierte Parameter für die Schmelzzone bei –70 °C

Versuch Nr.	h (mm)	u_{\min} (mm)	u_{\max} (mm)	E (GPa)	σ_{F0} (MPa)	$\Delta\sigma_1$ (MPa)	$\Delta\sigma_2$ (MPa)	$\Delta\sigma_3$ (MPa)	$\Delta\sigma_4$ (MPa)	$\Phi(\mathbf{p}_{\text{id}})$
144	0,500	0,087	1,405	218,3	818,4	180,6	124,4	36,2	66,2	2,90E-5
146	0,499	0,097	1,664	184,0	789,8	158,6	117,7	116,6	87,1	4,11E-5
147	0,498	0,087	1,578	219,3	810,1	182,3	173,5	62,9	24,2	2,25E-5
148	0,499	0,083	1,557	237,9	824,2	177,1	135,8	38,7	30,9	4,43E-5
149	0,501	0,090	1,597	200,2	801,7	186,5	121,3	69,5	29,0	1,75E-5
150	0,499	0,090	1,379	197,3	830,8	149,7	88,8	32,4	121,6	1,26E-4
151	0,500	0,084	1,270	224,0	840,6	163,6	122,5	48,1	135,8	3,48E-5
152	0,500	0,092	1,537	192,0	808,9	159,1	117,9	84,9	61,6	1,22E-4
153	0,500	0,088	1,610	224,8	788,4	183,5	149,0	68,3	24,8	3,86E-5
154	0,501	0,083	1,603	211,8	857,7	167,0	114,5	65,5	51,2	6,72E-5
155	0,499	0,091	1,694	197,0	821,3	177,1	150,0	50,0	36,6	2,99E-5
156	0,501	0,093	1,529	176,4	856,3	161,9	122,1	35,7	73,2	3,99E-5
157	0,500	0,088	1,570	201,7	846,0	174,7	98,9	88,7	48,9	2,35E-5
Mittel	0,500	0,089	1,538	206,5	822,6	170,9	125,9	61,3	60,8	4,90E-5

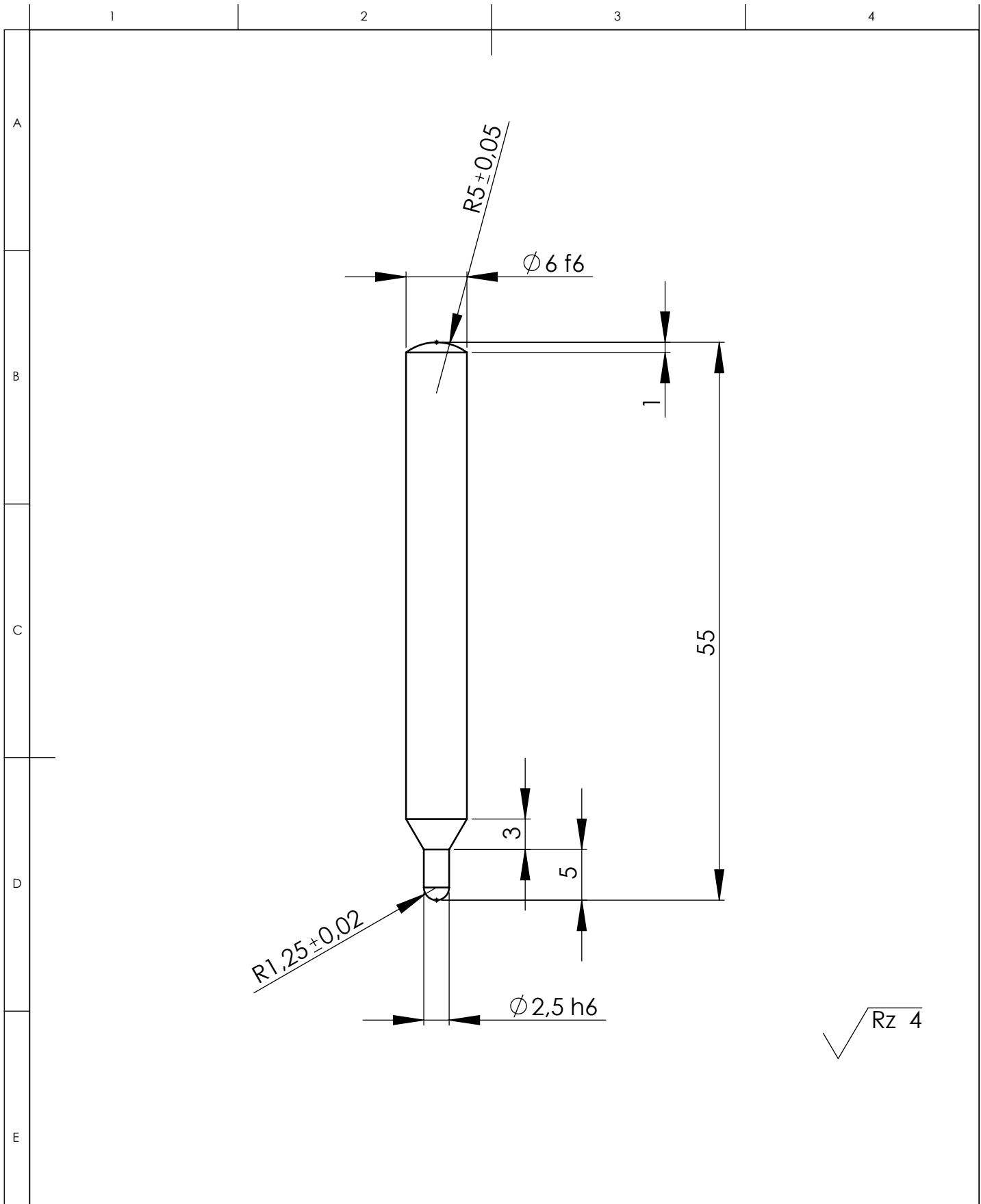
Tabelle A.6: Aus der F - u -Kurve des SPT identifizierte Parameter für den Grundwerkstoff bei 20 °C

Versuch Nr.	h (mm)	u_{\min} (mm)	u_{\max} (mm)	E (GPa)	σ_{F0} (MPa)	$\Delta\sigma_1$ (MPa)	$\Delta\sigma_2$ (MPa)	$\Delta\sigma_3$ (MPa)	$\Delta\sigma_4$ (MPa)	$\Phi(\mathbf{p}_{\text{ident}})$
11	0,495	0,130	1,841	238,8	382,9	11,6	103,8	220,7	65,2	5,34E-5
12	0,496	0,131	1,926	230,9	384,7	30,6	85,5	219,4	24,1	6,85E-6
13	0,502	0,125	1,930	226,4	407,3	10,4	91,4	248,6	33,5	8,07E-6
14	0,496	0,126	1,939	227,0	398,3	31,2	67,4	250,6	34,8	6,84E-6
15	0,500	0,120	1,938	235,1	410,8	8,9	110,4	242,2	80,9	1,72E-5
16	0,499	0,121	1,941	233,1	410,8	9,2	102,2	240,6	51,4	1,22E-5
17	0,501	0,122	1,931	226,5	411,0	14,1	75,0	262,5	28,1	6,93E-6
18	0,502	0,119	1,877	229,2	418,9	7,2	86,7	247,0	83,0	1,26E-5
19	0,499	0,126	1,941	231,1	400,4	15,1	90,9	246,3	51,6	1,05E-5
20	0,500	0,118	1,861	237,5	414,1	15,7	83,3	251,2	84,3	1,75E-5
21	0,500	0,115	1,922	237,7	425,2	4,1	100,8	214,5	135,1	2,54E-5
22	0,500	0,118	1,956	237,7	418,7	5,3	90,7	258,2	48,6	1,14E-5
23	0,498	0,126	1,937	227,7	402,0	15,9	80,7	272,2	31,3	8,35E-6
24	0,498	0,129	1,993	227,8	391,6	33,4	64,5	245,6	107,6	6,18E-6
25	0,500	0,119	1,967	243,7	410,2	24,5	53,2	257,1	98,2	6,48E-6
27	0,500	0,121	2,000	238,0	409,8	6,8	71,2	260,5	63,3	1,71E-5
28	0,501	0,125	1,994	229,0	401,8	26,9	50,3	274,0	17,4	7,25E-6
29	0,500	0,125	2,000	236,2	400,5	16,3	69,2	261,9	87,1	1,15E-5
30	0,500	0,119	2,000	242,1	408,3	16,6	70,1	259,8	123,9	2,29E-5
31	0,495	0,130	2,000	227,7	392,6	18,4	88,1	256,2	136,7	1,22E-5
32	0,501	0,114	2,000	245,8	423,1	2,8	62,7	290,4	268,9	2,59E-5
Mittel	0,499	0,123	1,947	234	405,8	15,5	80,9	251,4	78,8	1,46E-5

Tabelle A.7: Aus der F - u -Kurve des SPT identifizierte Parameter für den Grundwerkstoff bei -70 °C

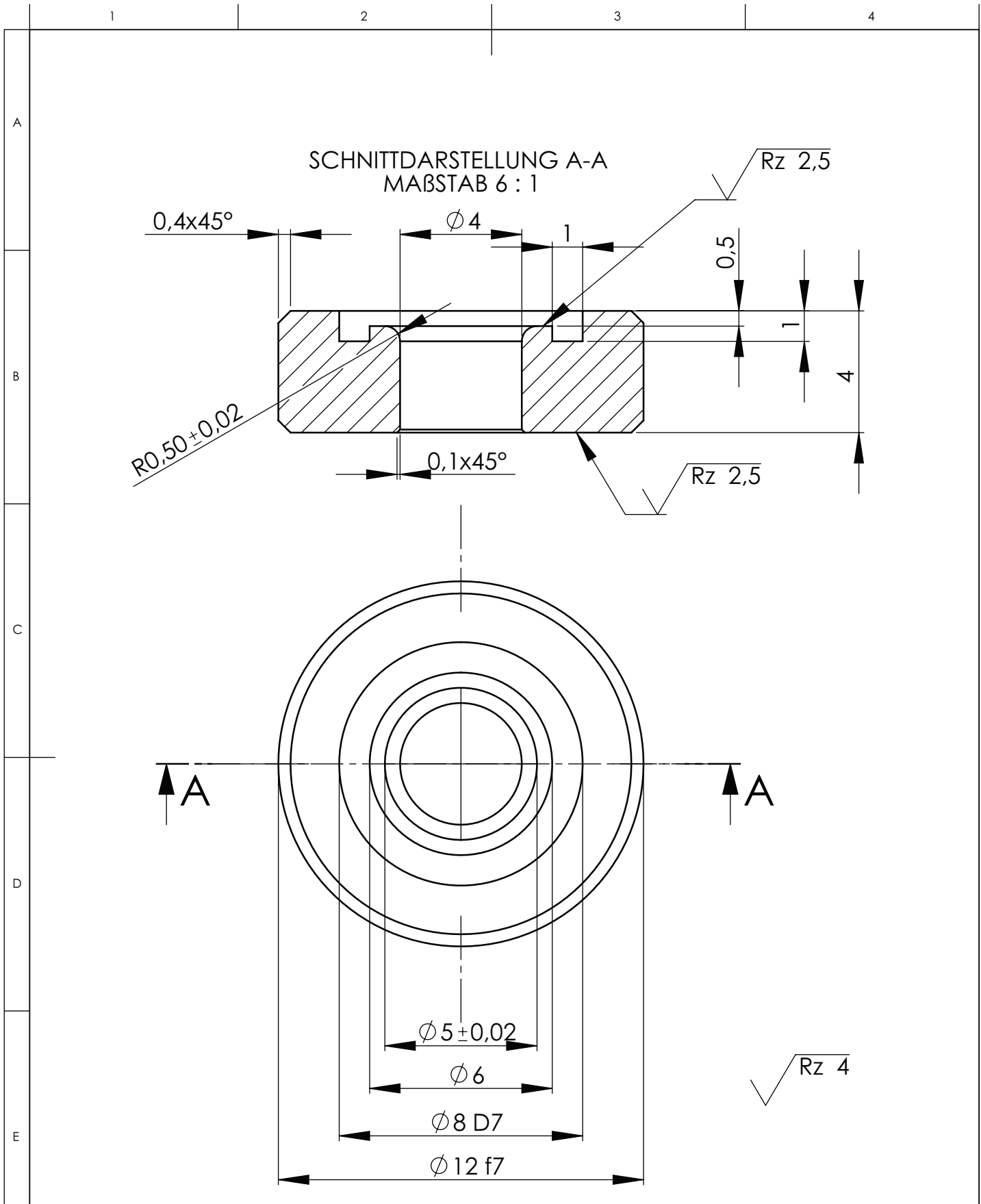
Versuch Nr.	h (mm)	u_{\min} (mm)	u_{\max} (mm)	E (GPa)	σ_{F0} (MPa)	$\Delta\sigma_1$ (MPa)	$\Delta\sigma_2$ (MPa)	$\Delta\sigma_3$ (MPa)	$\Delta\sigma_4$ (MPa)	$\Phi(\mathbf{p}_{\text{ident}})$
130	0,503	0,096	1,830	247,9	482,4	28,6	65,8	266,9	121,0	1,81E-5
131	0,503	0,098	1,859	245,8	456,9	37,2	56,1	275,0	152,8	5,67E-5
132	0,502	0,098	1,849	247,3	475,4	12,0	88,5	257,8	159,2	4,04E-5
133	0,502	0,078	1,759	248,2	526,9	17,4	23,1	263,4	208,2	5,76E-4
134	0,502	0,094	1,981	246,3	469,3	18,3	59,1	278,6	179,7	1,49E-4
135	0,502	0,113	1,931	231,1	420,0	35,8	131,8	182,3	239,7	1,30E-5
136	0,501	0,079	1,899	246,7	496,5	17,7	39,5	259,1	219,7	7,97E-4
138	0,501	0,098	1,928	248,2	452,9	62,2	51,6	236,5	233,9	2,86E-5
158	0,503	0,101	1,969	246,1	454,0	10,2	85,4	282,2	117,8	5,65E-5
159	0,503	0,093	1,836	246,3	485,5	7,5	69,9	270,8	245,5	1,59E-4
160	0,503	0,100	1,689	246,0	446,0	41,2	62,6	267,6	186,3	8,57E-5
Mittel	0,502	0,095	1,866	245,4	469,6	26,2	66,7	258,2	187,6	1,80E-4

B Fertigungszeichnungen von Stempel und Matrize



✓ Rz 4

Verwendungsbereich				zul. Abweichung		Oberfläche	Maßstab:2:1		Gewicht:		
							MATERIAL: Hartmetall				
					Datum	Name	Benennung Stempel				
				gez.	13.05.09	Rasche					
				gepr.							
				Norm							
							Zeichnungs-Nr.				
Zustf.	Änderung	Datum	Name				SHEET 1 OF 1				A4



Verwendungsbereich				zul. Abweichung		Oberfläche	Maßstab:6:1		Gewicht:
							MATERIAL: Hartmetall		
				gez.	Datum 13.05.09	Name Rasche	Benennung Matrize		
				gepr.					
				Norm					
							Zeichnungs-Nr.		A4
Zust.	Änderung	Datum	Name				Sheet 1 of 1		